ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Дисциплина состоит из 2-х учебных модулей и экзамена или зачета.

Модуль 1

Таблица 5.1

Виды аудиторных занятий и самостоятельной работы	**Сроки проведения или выполнения,** недели	**Трудоёмкость,** часы	**Примечание**
Лекции	1-8	16	
Упражнения	1-9	18	
Домашние задания текущие	1-9	12	
Контроль по модулю №1	9	4	

Модуль 2

Таблица 5.2

Виды аудиторных занятий и самостоятельной работы	**Сроки проведения или выполнения,** недели	**Трудоёмкость,** часы	**Примечание**
Лекции	9-17	18	
Упражнения	10-17	16	
Домашние задания текущие	10-17	10	
Контроль по модулю №2	17	4	

Модуль 1: Линейная алгебра

Лекции

Лекция 1. Аксиомы и примеры линейных пространств. Линейно зависимые и линейно независимые векторы. Критерий линейной зависимости, его следствия. Определение базиса и размерности линейного пространства. Теорема о единственности разложения по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в базисе. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при переходе к новому базису.

ОЛ-1, гл. 1, § 1.1–1.8; ОЛ-3, гл. 2, § 1, 2, 4.

Лекция 2. Подпространства линейного пространства. Ранг системы векторов, связь с рангом матрицы. Линейная оболочка. Примеры. Евклидово пространство, аксиомы и примеры. Норма вектора. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника. Ортогональность векторов. Линейная независимость ортогональной системы ненулевых векторов. Ортонормированный базис евклидова пространства. Вычисление скалярного произведения и нормы вектора в ортонормированном базисе.

ОЛ-1, гл. 2, § 2.1, 2.4–2.6, гл. 3, § 3.1–3.7; ОЛ-3, гл. 2, § 3, гл. 4, § 1, 2.

Лекция 3. Теорема о существовании ортонормированного базиса и процесс ортогонализации Грама - Шмидта (без док-ва). Линейные операторы и их матрицы (определение, примеры). Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису, инвариантность ее определителя. Подобные матрицы. Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

ОЛ-1, гл. 3, § 3.8, гл. 4 § 4.1–4.5; ОЛ-3, гл. 5, §1, 2.

Лекция 4. Характеристический многочлен линейного оператора, его независимость от базиса. След матрицы линейного оператора и его инвариантность. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы. Свойство множества собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, связь между ними (без док-ва). Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Существование базиса из собственных векторов в случае действительных и некратных корней характеристического уравнения. Матрица линейного оператора в базисе, состоящем из его собственных векторов.

ОЛ-1, гл. 5 § 5.1–5.5, гл. 6, § 6.1, 6.2; ОЛ-3, гл. 5, § 3.

Лекции 5-6. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе. Свойства корней характеристического многочлена самосопряженного оператора: вещественность и равенство алгебраических и геометрических кратностей (без док-ва). Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора (док-во для случая различных собственных значений). Ортогональные преобразования, ортогональные матрицы и их свойства. Диагонализация симметрической матрицы ортогональным преобразованием.

ОЛ-1, гл. 6, § 6.3; ОЛ-3, гл. 5.

Лекция 7. Квадратичные формы. Координатная и матричная формы записи. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Ранг квадратичной формы, его независимость от выбора базиса. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра (без док-ва). Канонический вид квадратичной формы. Метод Лагранжа. Закон инерции квадратичных форм (без док-ва).

ОЛ-1, гл. 8, § 8.1–8.3, 8.6; ОЛ-3, гл. 5, § 6.

Лекция 8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием. Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

ОЛ-1, гл. 8, § 8.4, 8.5; гл. 9, § 9.1–9.3; ОЛ-3, гл. 5, § 6.

Упражнения

Занятие 1. Линейное пространство. Линейная зависимость. Базис и размерность пространства. Переход к новому базису.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.1–4.9 (неч.), 4.15, 4.17, 4.21, 4.24, 4.28, 4.30, 4.37 или
ДЛ-3, гл. 3: 7–17 (неч.), 21–25 (неч.), 29–33 (неч.), 40, 53–57(неч.), 63.
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.2–4.10 (четн.), 4.16, 4.18, 4.19, 4.25, 4.31 или
ДЛ-3, гл. 3: 8–14 (четн.), 22–26 (четн.), 30–34 (четн.), 42, 54–58 (четн.), 64.
Занятие 2. Ранг системы векторов. Линейная оболочка системы векторов. Подпространство линейного пространства.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.45–4.53 (неч.) или
ДЛ-3, гл. 3: 73–77 (неч.), 87–91 (неч.), 95–99 (неч.).
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.46, 4.48, 4.52, 4.54 или
ДЛ-3, гл. 3: 74–78 (четн.), 88–92 (четн.), 96–100 (четн.), гл. 4: 6–12 (четн.), 32, 38.
Занятие 3. Евклидовы пространства. Процесс ортогонализации Грама – Шмидта.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.63 (а), 4.64 (а), 4.65 (а,б), 4.67–4.76 (неч.), или
ДЛ-3, гл. 4: 5–12 (неч.), 17– 24 (неч.), 31, 37, 39, 47, 49, 53, 57, 59.
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.63 (б), 4.64 (б), 4.65 (в), 4.67–4.76 (четн.) или
ДЛ-3, гл. 4: 5–12 (четн.) 17–24 (четн.), 32, 38, 48, 50, 54, 58, 60.
Занятие 4. Линейные операторы и их матрицы. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия над линейными операторами.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.83 – 4.99 (неч.), 4.103, 4.106 (б), 4.107, 4.110, 4.113 или
ДЛ-3, гл. 5: 1, 5, 7, 21, 23, 25, 32 (а), 33 (а), 44, 45 (а), 47, 49, 51 (а, б), 71.
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.84, 4.86, 4.90 – 4.100 (четн.), 4.102, 4.104, 4.108, 4.110(б), 4.118 или
ДЛ-3, гл. 5: 6, 8, 22, 24, 32 (б), 33 (б), 43, 45 (б), 48, 51 (в, г), 72.
Занятие 5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Диагонализация симметричных матриц ортогональным преобразованием.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.129, 4.131, 4.135–4.143 (неч.), 4.174, 4.183, 4.191 или
ДЛ-3, гл. 5: 75–80 (неч.). 89–100 (неч.), 155–162 (неч.).
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.130, 4.132, 4.134–4.142 (четн.), 4.176, 4.184, 4.186 или

ДЛ-3, гл. 5: 75–80 (четн). 89–100 (четн.), 156–162 (четн.).

Занятие 6. Квадратичные формы, критерий Сильвестра. Преобразование матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.218–4.225 (четн.) или
ДЛ-3, гл. 6: 13, 15, 43, 45.
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.218–4.233 (неч.) или
ДЛ-3, гл. 6: 14, 16, 44, 46.

Занятия 7-8. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и ортогональным преобразованием. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду.
Ауд.: ОЛ-6, гл. 4: 4.210, 4.211, 4.213, 4.215, 4.226, 4.228, 4.231 или
ДЛ-3, гл. 6: 19, 21, 23 (б), 29, 31, 35, 47, 49, 55.
Дома: ОЛ-6, гл. 4: 4.212, 4.214, 4.216, 4.227, 4.229, 4.230 или
ДЛ-3, гл. 6: 20, 22, 23 (а), 30, 32, 36, 48, 50, 56.

Занятие 9. Контроль по модулю 1 (РК №1).

Модуль 2: Функции нескольких переменных

Лекции

Лекция 1. Метрика и окрестности в $\mathbf{R}^n$. Открытые, замкнутые, ограниченные и связные множества в $\mathbf{R}^n$. Граница множества. Понятие области в $\mathbf{R}^n$. Скалярная функция нескольких переменных (ФНП) как отображение $F: W \to \mathbf{R}$ ($W \subset \mathbf{R}^n$). Линии и поверхности уровня. Предел ФНП. Бесконечно малые и бесконечно большие ФНП. Непрерывность ФНП в точке, на множестве. Свойства ФНП, непрерывных на множестве (без док-ва).

ОЛ-2, гл. 1, § 1.1–1.7; ОЛ-4, гл. 8, § 1–4; ОЛ-5, гл. 8, § 1–3, 11, 12.

Лекция 2. Частные производные ФНП, геометрическая интерпретация для $n = 2$. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанных частных производных от порядка дифференцирования. Матрица Гессе. Дифференцируемость ФНП. Необходимые условия и достаточное условие дифференцируемости.

ОЛ-2, гл. 2, § 2.1–2.6, гл. 3, § 3.1, 3.2; ОЛ-4, гл. 8, § 5, 6; ОЛ-5, гл. 8, § 4, 5.

Лекция 3. Полный дифференциал ФНП. Необходимые и достаточные условия того, что выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом (необходимость с доказательством). Восстановление функции по ее полному дифференциалу. Применение дифференциала ФНП к приближенным вычислениям. Производная сложной функции. Частная и полная производные ФНП. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высших порядков.

ОЛ-2, гл. 2, §2.7, ОЛ-4, гл. 8, §7–10; ОЛ-5, гл. 8, §6–9.

Лекция 4. Неявные функции. Теорема о существовании (без док-ва) и дифференцируемости неявной ФНП. Производная ФНП по направлению и градиент, их свойства.

ОЛ-2, гл. 2, § 2.7, гл. 3, § 3.5, гл. 4, § 4.1–4.3; ОЛ-4, гл. 8, §10, 11; ОЛ-5, гл. 8, § 9, 15.

Лекция 5. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, условия их существования и вывод уравнений. Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных. Формула Тейлора для ФНП (без док-ва).

ОЛ-2, гл. 5, § 5.1–5.4, гл. 3, § 3.4; ОЛ-4, гл. 8, §14, 15, 17; ОЛ-5, гл. 8, § 7, 8, 13–16.

Лекции 6-7. Экстремум ФНП. Необходимое условие существования экстремума. Достаточные условия экстремума (формулировка с помощью матрицы Гессе, без док-ва). Условный экстремум ФНП, его геометрическая интерпретация (при $n = 2$), функция Лагранжа. Необходимое условие существования условного экстремума (вывод для $n = 2$). Достаточные условия (без док-ва). Нахождение наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой ФНП на замкнутом ограниченном множестве.

ОЛ-2, гл. 6, § 6.1–6.4, гл. 7, § 7.1–7.4; ОЛ-4, гл. 8, § 18; ОЛ-5, гл. 8, § 19.

Лекция 8. Векторная ФНП (ВФНП) как отображение $F: W \to \mathbf{R}^m$ ($W \subset \mathbf{R}^n$). Координатные функции ВФНП. Геометрическая интерпретация для n, m = 2, 3. Предел ВФНП. Непрерывность ВФНП. Матрица Якоби ВФНП, якобиан (при $m = n$). Дифференцируемость ВФНП, ее дифференциал. Производная сложной ВФНП в матричной форме.

ОЛ-2, гл. 1, § 1.2–1.4, гл. 2, § 2.3, 2.6, 2.7; ДЛ -2, гл. 5, § 41, пп. 41.4–41.7.

Лекция 9. Обзорная.

Упражнения

Занятие 1. Область определения ФНП. Линии и поверхности уровня. Предел и непрерывность ФНП.

Ауд.: ОЛ-8: 1792 (в), 1793 (г), 1794 (в), 1795 (а), 1796 (в), 1797 (б, в), 1788 (в), найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} (x^3+3y^2)\cdot e^{-(x^2+y^2)}$, проверить функцию $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-3y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$ на непрерывность в точке (0; 0) или

ОЛ-6, гл. 7: 7.6, 7.8, 7.10, 7.19, 7.21 (построить линии и поверхности уровня), 7.32, 7.35, 7.44, 7.46, 7.50, 7.55.

Дома: ОЛ-8 гл. 4: 1792 (е, и), 1793 (б, в), 1794(г, ж), 1796 (а, б), 1797 (г, е), 1799 (б) или

ОЛ-6, гл. 7: 7.7, 7.9, 7.13, 7.20 (построить линии и поверхности уровня), 7.33, 7.34, 7.45, 7.47, 7.51.

Занятие 2. Частные производные 1-го порядка. Частные производные высших порядков. Дифференциал первого и второго порядка ФНП.

Ауд.: ОЛ-8: 1801–1825 (неч), 1892, 1894, 1897, 1834, 1838, 1844, 1917, 1924 или

ОЛ-6, гл. 7: 7.57, 7.60, 7.61, 7.63, 7.66, 7.87, 7.89, 7.91, 7.103, 7.105, проверить функцию $f(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^4-x^2+y^4}; & x^2+y^2\neq 0; \\ 0; & x^2+y^2=0. \end{cases}$ на дифференцируемость в точке (0,0).

Дома: ОЛ-8: 1801–1825 (четн.), 1891, 1893, 1898, 1838, 1840, 1845, 1916, 1925 или

ОЛ-6, гл. 7: 7.56, 7.58, 7.59, 7.62, 7.64, 7.67, 7.88, 7.90, 7.92, 7.102, 7.107.

Занятия 3-4. Производная сложной и неявной ФНП. Производная по направлению и градиент ФНП. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Ауд.: ОЛ-8: 1856, 1861, 1864, 1865, 1870, 1944, 1946, 1948, 1950, 1955, 1876, 1878, 1882 (а), 1886, 1889, 1981 (а), 1982, 1985, 1986 или

ОЛ-6, гл. 7: гл. 7: 7.114, 7.119, 7.122, 7.129, 7.135, 7.141, 7.145, 7.149, 7.152, 7.229 (а), 7.233 (а), 7.232, 7.234, 7.239 (а); ОЛ-7, гл. 10: 10.31–10.43 (неч.).

Дома: ОЛ-8: 1857, 1862, 1863, 1871, 1943, 1947, 1949, 1956, 1877, 1879, 1882 (б), 1883, 1888, 1981 (б), 1984, 1987, 1990 или

ОЛ-6, гл. 7: 7.116, 7.118, 7.123, 7.130, 7.136, 7.140, 7.146, 7.150, 7.151; 7.229 (б), 7.233 (б,в), 7.235, 7.239 (б); ОЛ-7, гл. 10: 10.32–10.44 (четн.).

Занятия 5-6. Безусловный и условный экстремум ФНП.

Ауд.: ОЛ-8: 2008, 2010, 2012, 2016, 2016.1, 2021–2024, 2031 или

ОЛ-6, гл. 7: 7.187–7.195 (неч.), 7.201, 7.205, 7.214.

Дома: ОЛ-8: 2009, 2011, 2014, 2016.2, 2023, 2024, 2033 или

ОЛ-6, гл. 7: 7.187–7.195 (четн.), 7.202–7.204, 7.210–7.213.

Занятие 7. Контроль по модулю 2 (РК №2).

Самостоятельная подготовка

Самостоятельная работа студента заключается в проработке материала лекций, выполнении домашних заданий, подготовке к контрольным работам и рубежным контролям.

Контрольные мероприятия и сроки их проведения

Модуль 1.

1. ДЗ №1 «Линейная алгебра»

   Срок выдачи 1 неделя, срок сдачи – 8 неделя

2. Контроль по модулю №1 (РК №1) «Линейная алгебра».

   Срок проведения – 9 неделя

Модуль 2.

1. ДЗ №2 «Функции нескольких переменных»

   Срок выдачи 9 неделя, срок сдачи – 16 неделя

   Примечание. Домашнее задание №2 по усмотрению кафедры может быть заменено контрольной работой.

2. Контроль по модулю №2 (РК №2) «Функции нескольких переменных».

   Срок проведения – 17 неделя

Литература

Основная литература (ОЛ)

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 336 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. IV).
2. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 456 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. V).
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2005.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т. 1. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 416 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
6. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1993. – 478 с.
7. Сборник задач по математике для втузов. Ч. 2. Специальные разделы математического анализа: Учеб. пособие для втузов / Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Астрель 2005. – 416 с.

Дополнительная литература (ДЛ)

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2007. – 307 с.
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. – М.: Высш. шк., 1981. – 584 с.
3. Сборник задач по линейной алгебре / Под ред. С.К. Соболева. – М.: МГТУ, 1991. –154 с.
4. Вся высшая математика: Учебник для втузов: В 6 т. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко и др. – Т. 1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 327 с.
5. Вся высшая математика: Учебник для втузов: В 6 т. / Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. и др. – Т. 2. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 184 с.
6. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, 1987. – 496 с.

Методические пособия

1. Крищенко А.П. Линейные пространства. Линейные операторы: Учеб. пособие. – М.: МГТУ, 1988. – 49 с.
2. Гришина Г.В., Козлов М.Е., Пашовкин Е.М., Подобряев В.Н. Методические указания к самостоятельной работе студентов по разделам “Математический анализ” и ”Линейная алгебра”, под ред. Гришиной Г.В. Учеб. пособие. – М.: МГТУ, 1990.–38 с.
3. Ильичев А.Т., Крапоткин В.Г., Савин А.С. Линейные операторы. Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: МГТУ, 2003. – 36 с.
4. Пугачев О.В., Стась Г.П, Чередниченко А.В. Квадратичные формы и их геометрические приложения. Методические указания к выполнению типового расчета. – М.: МГТУ, 2004. – 59 с.
5. Гришина Г.В., Демин А.И., Михайлова О.В. Функции многих переменных. Методические указания к выполнению домашнего задания. – М.: МГТУ, 2003. – 44 с.
6. Богомолов В.Г., Матвеев М.В., Филиновский А.В. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. – М.: МГТУ, 1993. – 52 с.
7. Богомолов В.Г., Матвеев М.В., Филиновский А.В. Прикладные задачи дифференциального исчисления функций нескольких переменных. – М.: МГТУ, 1993. – 56 с.
8. Дерябина Г.С., Чуев В.Ю. Вектор-функция нескольких переменных. – М: МГТУ, 2002, – 26 с.
9. Гласко А.В., Покровский И.Л., Станцо В.В. Системы линейных алгебраических уравнений – М, МГТУ им. Баумана, 2004.
10. Сидняев Н.И.. Феоктистов В.В. Линейные и евклидовы пространства. – М,: МГТУ им. Баумана, 2008.
11. Павельева Е.Б., Томашпольский В.Я. Линейная алгебра. Методические указания к выполнению типового расчета (ЭУИ). – М.: МГТУ им. Баумана, 2010.
12. Феоктистов В.В., Сидняев Н.И. Линейные и евклидовы пространства. Методические указания к выполнению домашнего задания. ─ М.:МГТУ, 2008, -71 с.

Рекомендуемые Интернет-сайты:

1. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Конспект лекций по линейной алгебре и функциям нескольких переменных http://mathmod.bmstu.ru/
2. http://www.mathelp.spb.ru - лекции по высшей математике