Лекции 1 - 2. Квантовые свойства излучения.

Гипотеза Планка, дискретный характер испускания и поглощения электромагнитного излучения веществом. Квантовое объяснение законов теплового излучения. Корпускулярно-волновой дуализм света. Фотоны. Фотоэффект и эффект Комптона.

Тела испускают электромагнитные волны за счет различных видов энергии. Излучение, испускаемое за счёт внутренней энергии тел, называется *тепловым излучением*.

Остальные типы излучения называются люминесценция. *Люминесценция* — нетепловое свечение вещества, происходящее после поглощения им энергии возбуждения. *Фотолюминесценция* — свечение под действием света (видимого и УФ-диапазона). Она, в свою очередь, делится на флуоресценцию и фосфоресценцию. *Хемилюминесценция* — свечение, использующее энергию химических реакций; *катодолюминесценция* — вызвана облучением быстрыми электронами (катодными лучами); *сонолюминесценция* — люминесценция, вызванная звуком высокой частоты и т.д.

При люминесценции равновесие излучения с телом невозможно, т.к. излучение прекращается после полного израсходования запасённой энергии.

Особенностью теплового излучения является то, что оно существует при любой температуре и может находиться в термодинамическом равновесии с телами, (т.е. когда мощность энергии излучения тела равна мощности поглощаемого излучения). Излучение происходит во всем диапазоне длин волн (от 0 до +∞) или во всём диапазоне частот.

Для характеристики мощности излучения вводят физическую величину – *энергетическая светимость R*. Это мощность излучения, испускаемого единичной площадкой поверхности тела по всем возможным направлениям (т.е. в пределах телесного угла 2π). Единицы измерения энергетической светимости – Вт/м^2.

Спектральной испускательной способностью тела (спектральной плотностью энергетической светимости) называется физическая величина, равная отношению мощности излучения dR_ω для волн с частотами в диапазоне $\left(\omega,\omega+d\omega\right)$ к величине этого диапазона $r_\omega=\dfrac{dR_\omega}{d\omega}$ (единицы измерения $\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{м}^2}=\dfrac{\text{Дж}}{\text{м}^2}$). Следовательно, если известна функция спектральной испускательной способности, то можно получить энергетическую светимость $R=\int\limits_0^\infty r_\omega d\omega$. Поэтому энергетическую светимость называют также *интегральной испускательной способностью*.

Т.к. тепловое излучение осуществляется за счёт внутренней энергии, то мощность излучения зависит от температуры тела, поэтому спектральная светимость является функцией двух параметров – частоты и температуры, что подчёркивают соответствующими обозначениями

$$r_{\omega,T}=r\left(\omega,T\right) \text{ и } R_T=\int\limits_0^\infty r_{\omega,T}d\omega .$$

Замечание. Спектральную светимость можно определить и через длину волны излучения $\tilde{r}_{\lambda,T}=\tilde{r}\left(\lambda,T\right)$. Так как $\omega=\dfrac{2\pi c}{\lambda}$, то $d\omega=-\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda$ (*c* – величина скорости света). Поэтому с учетом того, что при $\lambda\to+0$ выполняется $\omega\to+\infty$ получаем равенство

$$R_T=\int\limits_0^{+\infty} r_{\omega,T}d\omega=-\int\limits_{+\infty}^{0} r_{\omega,T}\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda=\int\limits_0^{+\infty} r_{\omega,T}\frac{2\pi c}{\lambda^2}d\lambda=\int\limits_0^{+\infty}\tilde{r}_{\lambda,T}d\lambda \text{, т.е. } r_{\omega,T}=\tilde{r}_{\lambda,T}\frac{\lambda^2}{2\pi c}.$$

В общем случае, часть падающего на тело излучения отражается, а часть поглощается (излучение, проходящее сквозь тело, можно не рассматривать). Физическая величина, равная отношению мощности поглощенного излучения для волн с частотами в диапазоне $\left(\omega,\omega+d\omega\right)$ к величине мощности падающего излучения в том же диапазоне частот, называется спектральной поглощательной способностью тела и также является функцией частоты и температуры $a_{\omega,T} = a(\omega,T) = \dfrac{d\Phi_\omega^{ПОГЛОЩ}}{d\Phi_\omega^{ПАДАЮЩ}}$.

Определение. Тело, поглощающее полностью падающее на его поверхность излучение во всем диапазоне частот и температур, называется *абсолютно чёрным телом* (АЧТ). Для АЧТ поглощательная спектральная способность тождественно равна единице для всего диапазона частот (и температур)

$$a^{АЧТ}{}_{\omega,T} = a^{АЧТ}(\omega,T) \equiv 1.$$

Тела, для которых $a_{\omega,T} < 1$ (независимо от ω и Т) называют *серыми*.

Закон Кирхгофа.

Рассмотрим тело, находящееся в равновесии со своим тепловым излучением. В силу принципа *детального равновесия*, для каждого интервала частот $(\omega,\omega+d\omega)$ выполняется равенство

$$d\Phi_\omega^{ПОГЛОЩ} = dR_\omega$$

выражающее тот факт, что внутренняя энергия тела не меняется, поэтому доля поглощенной энергии равна доле излученной энергии для каждого интервала частот $(\omega,\omega+d\omega)$. Но, с учётом определения спектральной поглощательной способности и спектральной испускательной способности, это равенство можно переписать в виде

$$a_{\omega,T} \cdot d\Phi_\omega^{ПАДАЮЩ} = r_{\omega,T} \cdot d\omega$$

откуда следует соотношение $\dfrac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}} = \dfrac{d\Phi_\omega^{ПАДАЮЩ}}{d\omega}$.

В этом равенстве справа стоит спектральная энергетическая характеристика падающего излучения, которая не зависит от свойств тела.

Если рассмотреть замкнутую равновесную термодинамическую систему из N разных тел (в том числе и АЧТ), то можно написать равенство

$$\left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_1 = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_2 = \ldots = \left(\frac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_N = \frac{d\Phi_\omega^{ПАДАЮЩ}}{d\omega}.$$

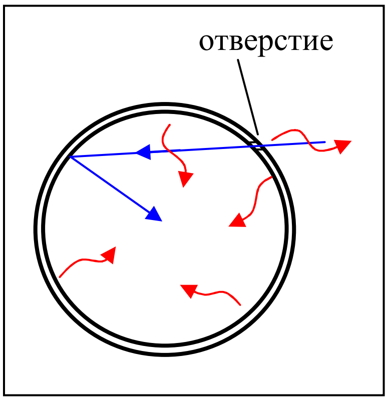
Т.к. одно из тел является абсолютно чёрным телом, для которого $a^{АЧТ}{}_{\omega,T} = a^{АЧТ}(\omega,T) \equiv 1$, то $\left(\dfrac{r_{\omega,T}}{a_{\omega,T}}\right)_i = r^{АЧТ}{}_{\omega,T}$ для любого номера i=1, …, N. Т.о. *отношение спектральной испускательной способности к спектральной поглощательной способности не зависит от свойств тела и является функцией частоты и температуры, совпадающей со спектральной плотностью энергетической светимости АЧТ*. Это утверждение носит название <u>закона Кирхгофа</u>.

Равновесное состояние излучения с веществом можно характеризовать объемной плотностью энергии u_T равновесного излучения. Соответственно, можно ввести спектральную плотность энергии $u_{\omega,T}$ такую, что $u_T = \int\limits_0^{+\infty} u_{\omega,T} d\omega$ (индекс T подчёркивает зависимость от температуры.)

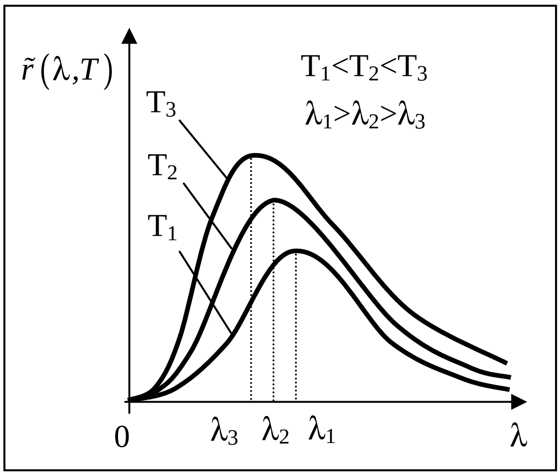
Расчёты показывают, что для АЧТ энергетическая светимость связана с объёмной плотностью энергии соотношением $R = \dfrac{c}{4} u_T$, и для спектральных функций $r^{АЧТ}{}_{\omega,T} = \dfrac{c}{4} u_{\omega,T}$.

Модель АЧТ.

Абсолютно чёрное тело является *идеализацией*. В природе АЧТ не существует. Однако достаточной хорошей моделью является практически замкнутая колба с двойными стенками



(между которыми - вакуум). В стенке этой колбе имеется малое отверстие. Излучение, вошедшее в отверстие, испытывает многократное отражение от стенок полости и, в конце концов, практически полностью ими поглощается. Т.к. площадь отверстия мала, то вероятность того, что падающее излучение после многократного отражения выйдет из полости, практически равна нулю. Температура стенок полости поддерживается постоянной. Поэтому внутренние стенки полости находятся в термодинамическом равновесии со своим тепловым излучением. Часть этого излучения выйдет через отверстие, и его можно зарегистрировать. Моделью АЧТ является именно *отверстие*, т.к. из него выходит излучение, близкое к излучению АЧТ.



Экспериментальные данные свидетельствуют о том, спектральная плотность энергетической светимости как функция частоты (или длины волны) имеет глобальный максимум. Соответствующая этому максимуму длина волны уменьшается с ростом температуры АЧТ, или, как принято говорить, *смещается* в сторону коротких длин волн.

На основе экспериментального исследования теплового излучения Стефан и Больцман получили зависимость энергетической светимости АЧТ от температуры. По определению, интегральная светимость равна площади под графиком спектральной светимости $R_T = \int\limits_0^{+\infty} r_{\omega,T} d\omega$.

Закон Стефана-Больцмана гласит, что энергетическая светимость АЧТ прямо пропорциональна 4-й степени температуры

$$R^{АЧТ} = \sigma \cdot T^4.$$

(Этот закон следует из законов термодинамики.) Коэффициент пропорциональности σ носит название постоянной Стефана-Больцмана и численно равен $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$.

Вильгельм Вин рассмотрел модель АЧТ, в которой одна из стенок полости могла двигаться с некоторой скоростью. Тогда из условия термодинамического равновесия излучения с веществом, учитывая эффект Доплера, он показал, что общий вид спектральной плотности энергетической светимости АЧТ как функции частоты и температуры следующий

$$r^{АЧТ}(\omega,T) = \omega^3 \cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right),$$

где $F\left(\dfrac{\omega}{T}\right)$ - некоторая функция от отношения $\dfrac{\omega}{T}$. Соответственно, $r_{\omega,T} = \tilde{r}_{\lambda,T}\dfrac{\lambda^2}{2\pi c}$, откуда

$$\tilde{r}_{\lambda,T}^{АЧТ} = r_{\omega,T}^{АЧТ}\frac{2\pi c}{\lambda^2} = \omega^3 \cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right)\frac{2\pi c}{\lambda^2} = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \cdot F\left(\frac{2\pi c}{\lambda T}\right)\frac{2\pi c}{\lambda^2} = \tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda T}\right)\frac{1}{\lambda^5}.$$

При этом функция $\tilde{r}_{\lambda,T}^{АЧТ}$ должна иметь максимум, соответствующий определенной длине волны λ_{MAX}. Условие максимума функции $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\tilde{r}_{\lambda,T}^{АЧТ}\right) = \dfrac{d}{d\lambda}\left[\tilde{F}\left(\dfrac{1}{\lambda T}\right)\dfrac{1}{\lambda^5}\right] = 0$ приводит к соотношению

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda T}\right)\frac{1}{\lambda^5}\right]=-\tilde{F}'\left(\frac{1}{\lambda T}\right)\frac{1}{\lambda^2 T}\frac{1}{\lambda^5}-5\tilde{F}\left(\frac{1}{\lambda T}\right)\frac{1}{\lambda^6}=0$$

откуда после сокращения λ^6 и обозначения $x=\frac{1}{\lambda T}$ получим уравнение с одной переменной

$$\tilde{F}'(x)x+5\tilde{F}(x)=0.$$

Т.к. максимум функции существует, то у этого уравнения есть хоть одно решение, соответствующее глобальному максимуму $x=x_{MAX}$. Тогда $x_{MAX}=\frac{1}{\lambda_{MAX}T}$. Т.е. длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности светимости обратно пропорциональна температуре АЧТ.

Закон смещения Вина.

Длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости АЧТ обратно пропорциональная температуре АЧТ: $\lambda_{MAX}=\frac{b}{T}$.

Константа $b=2{,}9\cdot 10^{-3}$ м·К носит название *постоянной Вина*.

Из этого закона следует, что при повышении температуры АЧТ, максимум функции $r^{АЧТ}(\omega,T)$ (или $\tilde{r}^{АЧТ}(\lambda,T)$) смещается в сторону коротких длин волн. (Отсюда и следует «странное» название – закон смещения.)

Приложение.

Обоснование закона Стефана-Больцмана с термодинамической точки зрения можно провести следующим образом. Первое начало термодинамики для равновесных процессов $TdS=dU+pdV$ можно записать через дифференциальное соотношение

$$dS=\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV=\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT+\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV+pdV\right)$$

Поэтому $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V=\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ и $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T=\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right)$.

Но $\frac{\partial^2 S}{\partial V\partial T}=\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial V}$, тогда $\frac{\partial}{\partial V}\left\{\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right\}=\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right)\right\}$ или

$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial V\partial T}\right)=-\frac{1}{T^2}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p\right)+\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial V}\right)+\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\right)$. Откуда $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T+p=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$.

Вводя давление равновесного излучения как $p=\frac{1}{3}u$, где $u=\frac{U}{V}$ - объёмная плотность внутренней энергии, получаем равенство $4u=T\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V$. После интегрирования выражения $4\frac{dT}{T}=\frac{du}{u}$ получаем, что объёмная плотность внутренней энергии пропорциональная 4-й степени температуры $u=c_0T^4$, где c_0 – константа интегрирования

Качественное обоснование формулы Вина может быть следующим. По закону Стефана-Больцмана $R_T^{АЧТ}=\int\limits_0^{+\infty} r_{\omega,T}^{АЧТ}d\omega=\sigma\cdot T^4$. Если формально при T=*const* сделать замену $\omega=x\cdot T$, то это выражение примет вид $T\int\limits_0^{+\infty} r^{АЧТ}(x)\,dx = \sigma\cdot T^4$. Т.к. зависимость от Т должна быть одинаковой с обеих сторон равенства, то подынтегральная функция должна иметь вид $r^{АЧТ}(x) = T^3\cdot f(x)$ или $r^{АЧТ}(\omega,T) = \omega^3\cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right)$, где введено обозначение $F(x) = \frac{f(x)}{x^3}$.

Формула Рэлея-Джинса

Рэлей и Джинс попытались получить аналитическую зависимость спектральной светимости от частоты. Для этого они привлекли методы классической термодинамики. Т.к. в плоской электромагнитной волне энергия поровну распределяется между магнитным и электрическим полями, то можно считать, что каждой волне соответствует две степени свободы i=2, поэтому средняя тепловая энергия переносимая электромагнитной волной равна

$$<\varepsilon> = <\varepsilon_Э> + <\varepsilon_M> = \frac{kT}{2} + \frac{kT}{2} = kT.$$

Подсчёт спектральной плотности количества волн (отношение возможного количества стоячих волн с частотами в интервале $(\omega,\omega+d\omega)$ в некотором объёме к величине этого объёма) приводит к величине $\frac{dN_\omega}{dV} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}$. Следовательно, спектральная объемная плотность энергии будут равна $u_{\omega,T} = \frac{dN_\omega}{dV}<\varepsilon> = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kT$. Откуда $r^{АЧТ}{}_{\omega,T} = \frac{c}{4}u_{\omega,T} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2}kT$.

Оказалось, что формула Рэлея-Джинса удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными только в области больших длин волн (т.е. малых частот.) При этом с ростом частоты объемная плотность энергии неограниченно возрастает. Т.к. эта формула была получена с учётом классических представлений, но результат не согласуется с результатами эксперимента, то стало ясно, что классическое представление является неудовлетворительным. Такую ситуацию условно назвали «ультрафиолетовой катастрофой».

Для объяснения поведения функции Макс Планк в 1900 году предложил гипотезу о *квантах*. Согласно этой гипотезе энергия системы может принимать только дискретные значения. При испускании электромагнитных волн энергия системы уменьшается на величину энергии излучения. Поэтому энергия излучения тоже является дискретной. Минимальную величину энергии излучения он назвал *квантом*. Квант энергии $E = h\nu = \hbar\omega$ пропорционален величине излучения.

Коэффициент пропорциональности $h \approx 6{,}626\cdot 10^{-34}$ Дж·с называется *постоянной Планка*. Соответственно, *приведённая постоянная* Планка $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1{,}055\cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Постоянная Планка является принципиально новой константой и не может быть получена из констант классической физики.

Если рассмотреть равновесное излучение как термодинамическую систему, то к ней можно применить классическое распределение Больцмана. Вероятность нахождения системы в одном из состояний со значением энергии E_n определяется выражением

$$p_n = \frac{exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}{\sum\limits_i exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}$$

здесь суммирование проводится по полному набору дискретных значений $\{E_0, E_1, E_2, ..., E_N\}$. Среднее значение энергии определится выражением

$$<\varepsilon> = p_0E_0 + p_1E_1 + p_2E_2 + ... + p_NE_N = \sum_{i=0}^{N} p_iE_i.$$

Для электромагнитной волны теплового излучения характерно излучение во всём диапазоне частот, поэтому набор энергий будет бесконечным $\{0,\hbar\omega,2\hbar\omega,...,n\hbar\omega,...\}$. Тогда

$$<\varepsilon>=\sum_{i=0}^{\infty}p_iE_i=\frac{\sum\limits_{i=0}^{\infty}exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)E_i}{\sum\limits_{i=0}^{\infty}exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)E_n}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right)}=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)n\hbar\omega}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)}.$$

Здесь для удобства немой индекс суммирования *i* заменён на *n*. Учтем, что в бесконечной геометрической прогрессии

$$1,\ exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right),\ exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right),\ exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right),\ \ldots$$

знаменатель прогрессии равен $exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)$. Если предположить, что $exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)<1$, то сумма равна $\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)=1+exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+...=\frac{1}{1-exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}$.

Тогда среднее значение энергии

$$<\varepsilon>=\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)n\hbar\omega}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}exp\left(-\frac{n\hbar\omega}{kT}\right)}=\frac{\hbar\omega exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+2\hbar\omega exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+3\hbar\omega exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)+...}{1+exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)+...}=$$

$$=\left(\hbar\omega exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+2\hbar\omega exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+3\hbar\omega exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)+...\right)\cdot\left(1-exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right)=$$

$$=\hbar\omega exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-\hbar\omega exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+2\hbar\omega exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)-2\hbar\omega exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)+3\hbar\omega exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)-...=$$

$$=\hbar\omega exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+\hbar\omega exp\left(-\frac{2\hbar\omega}{kT}\right)+\hbar\omega exp\left(-\frac{3\hbar\omega}{kT}\right)+...=\hbar\omega exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\left(1+exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)+...\right)=$$

$$=\hbar\omega\frac{exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}{1-exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)}=\frac{\hbar\omega}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1},\ \text{т.е.}\ <\varepsilon>=\frac{\hbar\omega}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}.$$

Следовательно, спектральная объемная плотность энергии будут равна

$$u_{\omega,T}=\frac{dN_\omega}{dV}<\varepsilon>=\frac{\omega^2}{\pi^2c^3}\frac{\hbar\omega}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}.\ \text{Откуда}\ r^{АЧТ}{}_{\omega,T}=\frac{c}{4}u_{\omega,T}=\frac{1}{4\pi^2c^2}\frac{\hbar\omega^3}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}.$$

Закон излучения Планка.

Спектральная энергетическая светимость АЧТ равна $r^{АЧТ}{}_{\omega,T}=\frac{1}{4\pi^2c^2}\frac{\hbar\omega^3}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$.

Следствия из формулы излучения Планка.

1) Вид функции в законе Планка совпадает с формулой Вина $r^{АЧТ}(\omega,T)=\omega^3\cdot F\left(\frac{\omega}{T}\right)$.

2) Найдем длину волны, соответствующую максимуму спектральной светимости АЧТ.

Т.к. $\tilde{r}_{\lambda,T}^{АЧТ}=r_{\omega,T}^{АЧТ}\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}=\dfrac{1}{4\pi^2c^2}\dfrac{\hbar\omega^3}{exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}=\dfrac{1}{4\pi^2c^2}\dfrac{\hbar\left(\dfrac{2\pi c}{\lambda}\right)^3}{exp\left(\dfrac{\hbar}{kT}\dfrac{2\pi c}{\lambda}\right)-1}\dfrac{2\pi c}{\lambda^2}=\dfrac{4\pi^2c^2\hbar}{\lambda^5\left(exp\left(\dfrac{\hbar}{kT}\dfrac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)}$,

то $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\tilde{r}_{\omega,T}^{АЧТ}\right)=\dfrac{d}{d\lambda}\left\{\dfrac{4\pi^2c^2\hbar}{\lambda^5\left(exp\left(\dfrac{\hbar}{kT}\dfrac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)}\right\}=0$, откуда

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{4\pi^2c^2\hbar}{\lambda^5\left(exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)}\right\}=-5\frac{4\pi^2c^2\hbar}{\lambda^6\left(exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)}+\frac{4\pi^2c^2\hbar\cdot exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)}{\lambda^5\left(exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)^2}\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda^2}=0,$$

$$\frac{exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)}{\left(exp\left(\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}\right)-1\right)}\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{\lambda}=5.$$

Вводя обозначение $x=\dfrac{\hbar}{kT}\dfrac{2\pi c}{\lambda}$, получаем трансцендентное уравнение $x\cdot exp(x)=5\left(exp(x)-1\right)$.

Решение этого уравнения $x_0\approx 4{,}965114232$. Откуда для длины волны λ_{MAX}, соответствующей максимуму спектральной испускательной способности получаем выражение

$$\lambda_{MAX}=\frac{\hbar}{kT}\frac{2\pi c}{x_0}\approx\frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{T}\text{ м.}$$

Следовательно, вычисленное значение постоянной Вина $b=2{,}9\cdot10^{-3}$ м·К практически совпадает с экспериментальным значением.

3) Найдем интегральную светимость

$$R_T=\int_0^{+\infty}r^{АЧТ}{}_{\omega,T}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4\pi^2c^2}\frac{\hbar\omega^3}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}d\omega=\int_0^{+\infty}\frac{(kT)^4}{4\pi^2c^2\hbar^3}\frac{\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^3}{exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}d\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)=\frac{k^4}{4\pi^2c^2\hbar^3}T^4\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{exp(x)-1}dx$$

Численный расчёт даёт значение $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{exp(x)-1}dx\approx 6{,}5$, откуда $R_T\approx 5{,}65\cdot10^{-8}\cdot T^4$.

Т.е. вычисленное значение постоянной Стефана-Больцмана практически совпадает с экспериментальным.

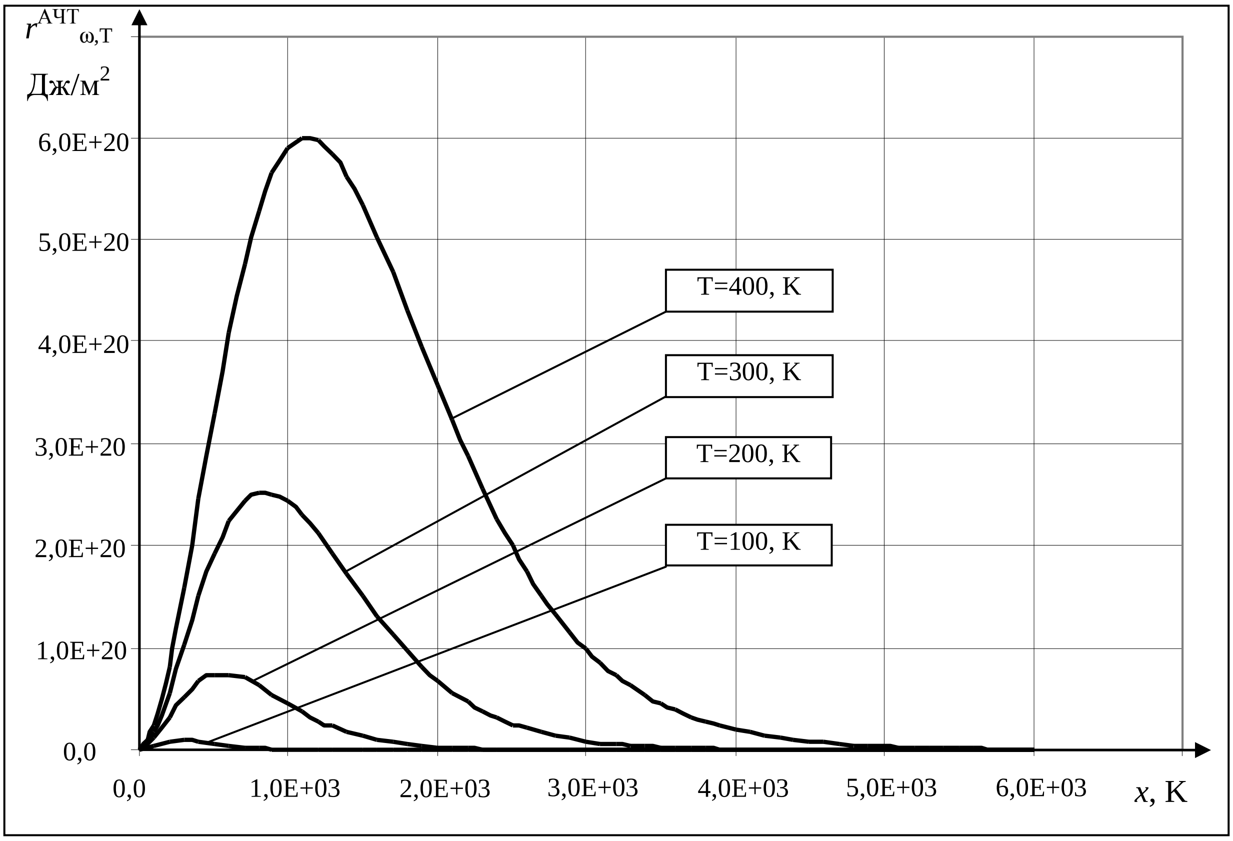
4) Если в законе излучения Планка $r^{АЧТ}{}_{\omega,T}=\dfrac{1}{4\pi^2c^2}\dfrac{\hbar\omega^3}{exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$ устремить $\hbar\omega\to+0$, то с учетом разложения $exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)\approx1+\dfrac{\hbar\omega}{kT}$, получим выражение $r^{АЧТ}{}_{\omega,T}\approx\dfrac{1}{4\pi^2c^2}\dfrac{\hbar\omega^3}{1+\dfrac{\hbar\omega}{kT}-1}=\dfrac{\omega^2}{4\pi^2c^2}kT$,

совпадающее с формулой Рэлея-Джинса. Т.е. формула Рэлея-Джинса описывает случай, когда энергия кванта излучения много меньше энергии теплового движения $\hbar\omega<<kT$.

5) Для примера представим графики $r^{АЧТ}{}_{\omega,T}$ для некоторых температур. Для этого введём переменную $x=\dfrac{\hbar\omega}{k}$ и перепишем закон излучения Планка в виде

$$r^{АЧТ}{}_{\omega,T}=\frac{(k)^3}{4\pi^2c^2\hbar^2}\frac{\left(\dfrac{\hbar\omega}{k}\right)^3}{exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}=\frac{k^3}{4\pi^2c^2\hbar^2}\frac{x^3}{exp(x)-1}=\frac{\left(1{,}38\cdot10^{-23}\right)^3}{4\pi^2\cdot9\cdot10^{-16}\cdot1{,}055^2\cdot10^{-68}}\cdot\frac{x^3}{exp\left(\dfrac{x}{T}\right)-1}$$

Тогда $r^{АЧТ}{}_{\omega,T}\approx6{,}6\cdot10^{12}\dfrac{x^3}{exp\left(\dfrac{x}{T}\right)-1}$. Графики такой зависимости для различных T представлены выше.



Фотоэффект

Фотоэлектрическим эффектом или *внешним фотоэффектом* называется явление испускания электронов металлами под действием падающего света. (Явление испускания электронов веществом под действием падающего света называется фотоэмиссией).

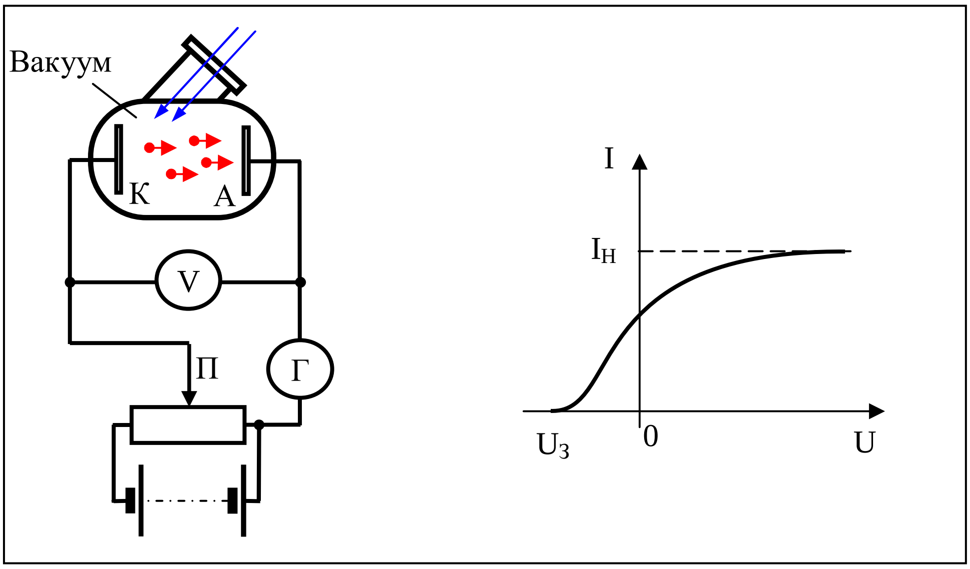
Явление фотоэффекта открыл Герц в 1887 г.

Александр Григорьевич Столетов в конце 19 века установил законы фотоэффекта:

1) наибольшее действие оказывают ультрафиолетовые лучи;
2) сила тока насыщения возрастает с увеличением освещённости;

3) испускаемые под действием света частицы имеют отрицательный заряд. (Э. А. фон Ленард и Дж. Дж. Томсон затем установили, что это – электроны.)

В установке для исследования фотоэффекта свет сквозь кварцевое стекло освещает ка-



тод, который вместе с анодом находится в вакуумированной колбе. Напряжение между катодом и анодом V можно регулировать (положительным считается напряжение, при котором потенциал катода меньше потенциала анода). Наличие тока в цепи регистрируют гальванометром Г. Вольт-амперная характеристика фотоэффекта свидетельствует, что

1) при освещении катода ток в цепи есть даже при нулевом напряжении между катодом и анодом. Это означает, что часть электронов, вылетевших с катода, попадает на анод.

2) Наличие тока освещения говорит о том, что все электроны, вылетевшие с катода, попадают на анод.

3) При некотором обратном (задерживающем) напряжении фототок в цепи прекращается. Величина этого напряжения зависит от частоты падающего света, но не зависит от освещённости. Этот факт противоречит классическому описанию – при увеличении освещенности катода напряженность электрического поля увеличивается – поэтому скорость электронов вылетающих должна возрастать, т.е. величина задерживающего напряжения должна зависеть от освещённости.

Формула Эйнштейна для фотоэффекта.

А.Эйнштейн в 1905 г. построил теорию фотоэффекта (за эту работу он получил Нобелевскую премию по физике). Он предположил, что электромагнитное излучение не только испускается квантами, но поглощается тоже квантами. Тогда по закону сохранения энергии

$$\hbar\omega = A_B + E_{КИН\_MAX} \text{ или } h\nu = A_B + E_{КИН\_MAX}$$

т.е. энергия поглощённого кванта энергии расходуется на совершение электроном работы по выходу из металла (величина $A_В$ называется работой выхода из металла) и на сообщение электрону кинетической энергии движения.

Величина работы выхода $A_В$ – это *минимальная* величина энергии, затрачиваемая на выход электрона из металла. В этом случае электрон приобретает максимальную кинетическую энергию $E_{КИН\_MAX}$. В других случаях возможна ситуация, при которой электрону понадобится затратить больше энергии для выхода, поэтому и его кинетическая энергия будет меньше максимальной.

Данная теория позволила объяснить экспериментальные результаты для фототока.

Если между катодом и анодом приложить обратное напряжение (при котором потенциал катода выше потенциала анода), то на электроны, вылетающие из катода, будет действовать сила, направленная против их движения. Следовательно, электроны будут тормозиться. Электрический ток прекратиться в тот момент, когда максимальная кинетическая энергия электронов будет израсходована на работу против сил электрического поля

$$0-E_{КИН\_MAX}=A_{КУЛ}=q\left(\varphi_К-\varphi_А\right)=-eU_З$$

(здесь учтено, что заряд электрона отрицательный $q=-e$.) Тогда, с учётом формулы Эйнштейна для фотоэффекта $E_{КИН\_MAX}=\hbar\omega-A_В$ находим выражение для задерживающего напряжения

$$U_З=\frac{\hbar\omega-A_В}{e} \text{ или } U_З=\frac{h\nu-A_В}{e}.$$

Т.о. задерживающее напряжение зависит от частоты падающего излучения.

Если выполняется равенство $\hbar\omega=A_В$ или $h\nu=A_В$, то фототок прекращается даже при отсутствии напряжении между катодом и анодом. Величина частоты света, при которой фототок прекращается, называется *красной границей* фотоэффекта $\omega_{КР}=\frac{A_В}{\hbar}$ или $\nu_{КР}=\frac{A_В}{h}$.

(Название «красная граница» возникло потому, что для некоторых металлов эта частота соответствует красному цвету.)

Соответственно, длина волны красной границы фотоэффекта $\lambda_{КР}=\frac{hc}{A_В}$.

Пример.

Элемент	$A_В$, эВ	$A_В$, Дж	$\nu_{КР}$, Гц	$\lambda_{КР}$, м
K	2,15	$3{,}44\cdot10^{-19}$	$5{,}19\cdot10^{14}$	$5{,}77849\cdot10^{-7}$
Na	2,27	$3{,}63\cdot10^{-19}$	$5{,}48\cdot10^{14}$	$5{,}47302\cdot10^{-7}$
Cu	4,47	$7{,}15\cdot10^{-19}$	$1{,}08\cdot10^{15}$	$2{,}77936\cdot10^{-7}$

Число вылетающих электронов пропорционально числу квантов, поэтому при увеличении освещённости, когда число квантов излучения увеличивается, количество электронов тоже увеличивается, следовательно, фоток увеличивается.

Фотоны.

На основе результатов теории фотоэффекта А. Эйнштейн предложил гипотезу, что излучение не только излучается и поглощается квантами, но распространяется в пространстве тоже квантами. Квант электромагнитного излучения соответствует порции (части) электромагнитной волны, которую позднее химик Гилберт Льюис предложил назвать *фотон* (1926 г.).

С учётом этого названия формула Эйнштейна для фотоэффекта

$$\hbar\omega=A_В+E_{КИН\_MAX} \text{ или } h\nu=A_В+E_{КИН\_MAX}$$

можно трактовать так: энергия *фотона* расходуется на совершение электроном работы выхода из металла и на сообщение электрону кинетической энергии.

Замечание. В многофотонных процессах для выхода электрона требуется несколько фотонов. В этом случае уравнение Эйнштейна примет вид

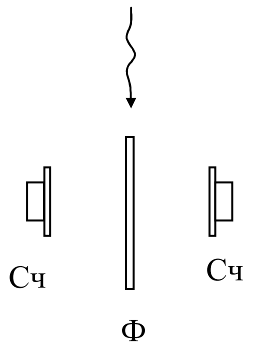
$$N\hbar\omega=A_В+E_{КИН\_MAX} \text{ или } Nh\nu=A_В+E_{КИН\_MAX}$$

где N – число фотонов.

Замечание. В отличие от внешнего фотоэффекта внутренний фотоэффект – это переход электрона в новое состояние с более высоким уровнем энергии.

Предположение о том, что энергия распространяется порциями противоречит результатам теории Максвелла, подтверждённым в оптике теорией Френеля-Кирхгофа. Излучение является суперпозицией сферических волн от вторичных точечных источников, которые распространяются во всех направлениях. Отсутствие излучения в каком-то направлении объясняется дифракцией и интерференцией волн.

Вальтер Боте в 1925 году провёл опыт, подтверждающий существование квантов излучения (фотонов). Схема опыта такова: тонкая металлическая фольга облучалась слабым рентгеновским излучением. По обе стороны от фольги стояли газоразрядные счётчики для регистрации излучения от фольги. По классической теории излучение фольги должно представлять собой сферические волны, распространяющиеся во все стороны. Следовательно, оба счётчика должны одновременно зарегистрировать эту волну. Если же под действием рентгеновского излучения фольга испускает кванты, движущиеся в разных направлениях, то счётчики срабатывали бы не одновременно. Оказалось, что моменты регистрации волн у обоих счётчиков не совпадали. Т.о. было подтверждено, что излучение состоит из квантов (фотонов).



Энергия фотона зависит от частоты. Т.к. при переходе к другой движущейся системе отсчёта частота, вообще говоря, меняется, то и энергия фотона должна меняться. Из результатов, полученных в СТО, следует, что при переходе из одной системы отсчёта К в другую систему К′ (которая движется в направлении сигнала – оси X), частота сигнала меняется следующим образом $\omega' = \omega\dfrac{1-\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$, поэтому энергия фотона $E = \hbar\omega$ тоже меняется $E' = E\dfrac{1-\dfrac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$. Но законы преобразования энергии и импульса (вдоль направления движения – оси X) в СТО имеют вид $E' = \dfrac{E - v\cdot p_x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}$.

Откуда следует, что для импульса фотона справедливо соотношение $p = \dfrac{E}{c}$. Инвариантной величиной при переходе от одной системы отсчёта к другой является соотношение между энергией, импульсом и массой покоя $E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$. Для фотона $p = \dfrac{E}{c}$, поэтому его масса покоя должна быть равной нулю $m_0 = 0$. *Фотон всегда движется со скорость света – его нельзя остановить*, поэтому говорить об его массе покоя нельзя.

Из соотношения $p = \dfrac{E}{c}$ следует, что $p = \dfrac{\hbar\omega}{c} = \dfrac{2\pi\hbar}{\lambda}$ или $p = \dfrac{h\nu}{c} = \dfrac{h}{\lambda}$. Если движение фотона описать волновым вектором $\vec{k}$, где волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, то вектор импульса фотона можно записать в виде $\vec{p} = \hbar\cdot\vec{k}$.

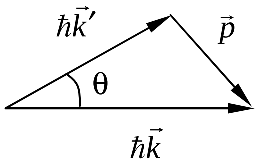
Такие явления как интерференция и дифракция света свидетельствуют о волновой природе света. Фотоэффект свидетельствует, что свет является потоком частиц (корпускул). Таким образом, свет обнаруживает *корпускулярно-волновой дуализм* – в одних явлениях он ведёт как волны, а в других как набор частиц.

Рассмотрим явление, в котором одновременно проявляются и волновые и корпускулярные свойства света.

Эффект Комптона.

Эффект Комптона (Комптон-эффект) – явление, состоящее в изменении длины волны рассеянного излучения при пропускании через вещество излучения рентгеновского диапазона. Изменение длины волны не зависит от свойств вещества, но зависит от угла рассеяния. Если длина волны падающего излучения λ, длина волны рассеянного λ', а θ - угол рассеяния, то опыт показывает, что справедлива формула для изменения длины волны $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C\left(1 - cos\,\theta\right)$, где постоянная величина $\lambda_C = 2{,}4263 \cdot 10^{-12}$ м называется *комптоновской постоянной* (*комптоновской длиной волны для электрона*). Уменьшение энергии фотона после комптоновского рассеяния называется *комптоновским сдвигом*.

Для описания этого явления рассмотрим упругое соударение фотона и электрона. Т.к. скорость электрона много меньше скорости света, то при описании соударения можно считать, что электрон покоится. При этом будем рассматривать свободные электроны – т.е. такие электроны, которые относительно слабо связаны с атомами вещества. (В случае сильной связи электрон и атом ведут себя как единое целое при таком ударе.) При ударе фотона с (покоившимся электроном) сохраняется вектор импульса $\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}$.



Здесь $\hbar\vec{k}$, $\hbar\vec{k}'$ - импульсы фотона до и после удара, $\vec{p}$ - импульс электрона после удара (начальный импульс электрона равен нулю).

Так как удар упругий, то сохраняется энергия $E + m_e c^2 = E' + E_e$

$E = h\nu$, $E' = h\nu'$ - энергия фотона до и после удара, $m_e c^2$ - энергия покоя электрона, E_e - энергия электрона после удара.

По теореме косинусов запишем закон сохранения импульса в виде равенства

$$p^2 = \left(\hbar k\right)^2 + \left(\hbar k'\right)^2 - 2\cdot\hbar k\cdot\hbar k'\cdot cos\,\theta \text{ или } p^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\cdot\frac{h}{\lambda}\cdot\frac{h}{\lambda'}\cdot cos\,\theta.$$

Но для электрона справедливо выражение $E_e^2 - p^2c^2 = \left(m_e c^2\right)^2$, откуда $\dfrac{E_e^2}{c^2} - m_e^2c^2 = p^2$. Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\frac{E_e^2}{c^2} - m_e^2c^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\cdot\frac{h}{\lambda}\cdot\frac{h}{\lambda'}\cdot cos\,\theta$$

Из выражения для закона сохранения энергии $E_e^2 = \left(E + m_e c^2 - E'\right)^2 = \left(h\nu + m_e c^2 - h\nu'\right)^2$.

Т.к. $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, $\nu' = \dfrac{c}{\lambda'}$, то $E_e^2 = \dfrac{h^2c^2}{\lambda^2} + 2h\dfrac{c}{\lambda}m_e c^2 - 2h^2\dfrac{c^2}{\lambda\lambda'} + m_e^2c^4 - 2h\dfrac{c}{\lambda'}m_e c^2 + \dfrac{h^2c^2}{\lambda'^2}$.

Подставим это соотношение в выражение закона сохранения импульса:

$$\frac{\dfrac{h^2c^2}{\lambda^2} + 2h\dfrac{c}{\lambda}m_e c^2 - 2h^2\dfrac{c^2}{\lambda\lambda'} + m_e^2c^4 - 2h\dfrac{c}{\lambda'}m_e c^2 + \dfrac{h^2c^2}{\lambda'^2}}{c^2} - m_e^2c^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\cdot\frac{h}{\lambda}\cdot\frac{h}{\lambda'}\cdot cos\,\theta$$

$$\frac{h^2}{\lambda^2} + 2h\frac{c}{\lambda}m_e - 2\frac{h^2}{\lambda\lambda'} + m_e^2c^2 - 2h\frac{c}{\lambda'}m_e + \frac{h^2}{\lambda'^2} - m_e^2c^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2\cdot\frac{h}{\lambda}\cdot\frac{h}{\lambda'}\cdot cos\,\theta$$

После сокращений и перестановок остаётся равенство $\dfrac{m_e c}{\lambda} - \dfrac{m_e c}{\lambda'} = \dfrac{h}{\lambda\cdot\lambda'}\left(1 - cos\,\theta\right)$.

Умножим на $\lambda\cdot\lambda'$ и разделим на $m_e c$:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1 - cos\,\theta\right)$$

Получили формулу, совпадающую с экспериментальной. Для постоянной Комптона получается выражение

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} = \frac{6{,}626\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 3\cdot 10^{8}} \approx 0{,}24271\cdot 10^{-11} \text{ м}$$

тоже практически совпадающее с экспериментальным.

Явление обнаружено американским физиком Артуром Комптоном в 1923 году для рентгеновского излучения. В 1927 Комптон получил за это открытие Нобелевскую премию по физике.

В комптон-эффекте фотоны одновременно проявляют корпускулярные (импульс) и волновые (длина волны).

Замечание. Для наблюдения эффекта Комптона необходимо, чтобы длина волны излучения была примерно равна комптоновской постоянной. Для свободных электронов это значение $\lambda_C \approx 2{,}43\cdot 10^{-12}$. При соударении фотона с электронами, сильно связанными с атомами, надо рассматривать атом как единое целое. В этом случае $\lambda_C \sim 10^{-16}$ м и изменение длины рассеянного излучение является величиной гораздо меньшего порядка.

Замечание. Эффектом, обратным эффекту Комптона, является увеличение частоты света, претерпевающего рассеяние на релятивистских электронах, имеющих энергию выше, чем энергия фотонов. То есть в процессе такого взаимодействия происходит передача энергии от электрона фотону. *Обратный эффект Комптона* ответственен за рентгеновское излучение галактических источников, рентгеновскую составляющую реликтового фонового излучения, трансформацию плазменных волн в высокочастотные электромагнитные волны.