Приложение 2.

Падение волны на границу раздела диэлектриков

Рассмотрим падение *плоской* электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух диэлектриков.

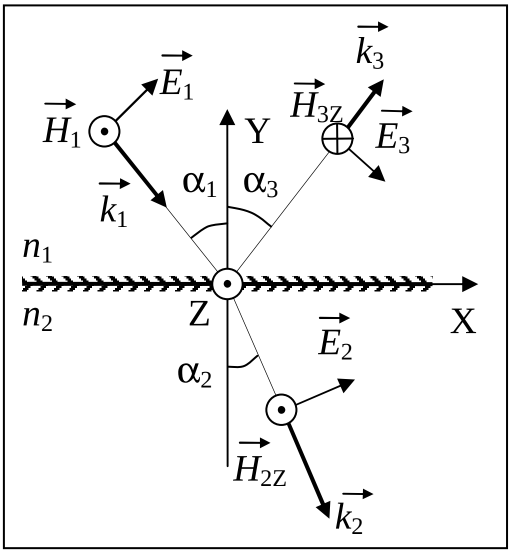
Будем предполагать, что волна является линейно-поляризованной.

Уравнения волны $\vec{E}=\vec{E}_0 cos\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi\right)$, $\vec{H}=\vec{H}_0 cos\left(\omega t-\left(\vec{k},\vec{r}\right)+\varphi\right)$, $\frac{E}{H}=\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Ход каждой из волн зададим с помощью лучей и соответствующих волновых векторов.

Рассмотрим *любую* точку на границе. В ней пересекаются три луча – луч падающей волны, луч прошедшей волны и луч отражённой волны.

Вдоль границы введём систему координат так, чтобы волновой вектор падающей волны лежал в плоскости (XY), где ось X направлена вдоль границы, а



вектор Y перпендикулярен ей, а начало координат совпадало с выбранной точкой. Тогда $\vec{k}_1=\left(k_1 sin\alpha_1,-k_2 cos\alpha_1,0\right)$, где угол α_1 между нормалью к границе (осью Y) и лучом падающей волны будем называть *углом падения*.

Будем обозначать параметры падающей волны индексом «1», прошедшей волны индексом «2», а отражённой – «3». Введём угол *преломления* α_2 и угол *отражения* α_3 - углы между нормалью и соответствующими лучами. Тогда

$$\vec{k}_2=\left(k_2 sin\alpha_2,-k_2 cos\alpha_2,k_{2Z}\right),\ \vec{k}_3=\left(k_3 sin\alpha_3,k_3 cos\alpha_3,k_{3Z}\right).$$

В общем случае падающую волну можно представить в виде суперпозиции двух волн, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны. Поэтому рассмотрим падение таких волн по-отдельности.

1) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор $\vec{H}_1 = (0,0,H_1)$ параллелен границе, а вектор $\vec{E}_1$ лежит в плоскости (XY), т.е. $\vec{E}_1 = (E_{1X}, E_{1Y}, 0)$. Как говорят, волна поляризована в плоскости падения.

Так как на границе должны выполняться условия $\vec{E}_{1t} + \vec{E}_{3t} = \vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1t} + \vec{H}_{3t} = \vec{H}_{3t}$, то

$$E_{1X} + E_{3X} = E_{2X} \text{ и } E_{3Z} = E_{2Z},$$

$$H_1 + H_{3Z} = H_{2Z} \text{ и } H_{3X} = H_{2X}.$$

Кроме того, на границе выполняются условия
$\vec{D}_{1n} + \vec{D}_{3n} = \vec{D}_{2n}$ и $\vec{B}_{1n} + \vec{B}_{3n} = \vec{B}_{2n}$, поэтому $\varepsilon_1 (E_{1Y} + E_{3Y}) = \varepsilon_2 E_{2Y}$, $\mu_1 H_{3Y} = \mu_2 H_{2Y}$.

Координаты E_{2Z}, E_{3Z}, H_{2X}, H_{3X}, H_{2Y}, H_{3Y} не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к. $\vec{E}_2 = (E_{2X}, E_{2Y}, 0)$, $\vec{E}_3 = (E_{3X}, E_{3Y}, 0)$, $\vec{H}_2 = (0,0,H_2)$, $\vec{H}_3 = (0,0,H_3)$.

Тогда волновые векторы тоже лежат в плоскости (XY):

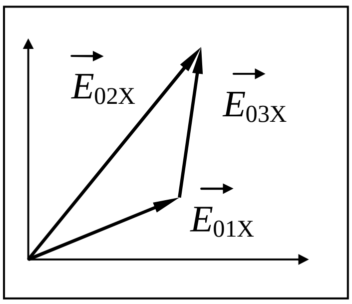
$$\vec{k}_2 = (k_{2X}, k_{2Y}, 0),\ \vec{k}_3 = (k_{3X}, k_{3Y}, 0).$$

Уравнения для напряжённостей всех трех волн

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos\left(\omega_1 t - (\vec{k}_1, \vec{r}) + \varphi_1\right),\ \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos\left(\omega_2 t - (\vec{k}_2, \vec{r}) + \varphi_2\right),\ \vec{E}_3 = \vec{E}_{03} \cos\left(\omega_3 t - (\vec{k}_3, \vec{r}) + \varphi_3\right)$$

Для них должно выполняться условие на границе $E_{1X} + E_{3X} = E_{2X}$. Точки границы задаются радиус-вектором $\vec{r} = (x, 0, z)$, поэтому на границе выполняется равенство

$$E_{01X} \cos(\omega_1 t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03X} \cos(\omega_3 t - (k_{3X} x) + \varphi_3) = E_{02X} \cos(\omega_2 t - (k_{2X} x) + \varphi_2).$$



В частности, в точке x=0:

$$E_{01X} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_{03X} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) = E_{02X} \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

На амплитудно-векторной диаграмме сумма трех векторов постоянной длины $\vec{E}_{01X} + \vec{E}_{03X} = \vec{E}_{02X}$ будет выполняться, если только угловые скорости вращения этих векторов одинаковые $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

Т.е. частоты всех трех волн одинаковые. Обозначим эту частоту ω.

Теперь зафиксируем какой-то момент времени t_0. Тогда в любой точке границы (для любого значения x) выполняется равенство

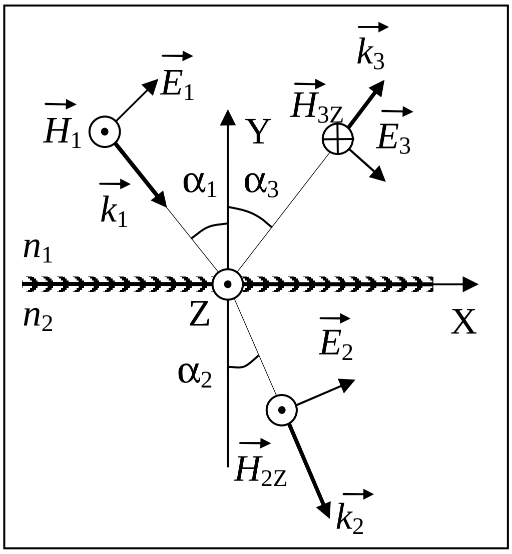
$$E_{01X}\,cos\left(-\left(k_{1X}x\right)+\left\{\omega t_0+\varphi_1\right\}\right)+E_{03X}\,cos\left(-\left(k_{3X}x\right)+\left\{\omega t_0+\varphi_3\right\}\right)=E_{02X}\,cos\left(-\left(k_{2X}x\right)+\left\{\omega t_0+\varphi_2\right\}\right)$$

Так как величина x является параметром, то волновые числа k_{1X}, k_{2X}, k_{3X} будут являться аналогом угловой скорости вращения векторов $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$, $\vec{E}_{03}$ на амплитудно-векторной диаграмме. Следовательно, равенство $\vec{E}_{01}+\vec{E}_{03}=\vec{E}_{02}$ возможно только в случае, когда $k_{1X}=k_{2X}=k_{3X}$.

Из $k_{1X}=k_{2X}$ следует соотношение $k_1\,sin\,\alpha_1=k_2\,sin\,\alpha_2$. Т.к. $k_1=\frac{\omega_1}{v_1}=\frac{\omega n_1}{c}$ и $k_2=\frac{\omega_2}{v_2}=\frac{\omega n_2}{c}$, то угол падения и угол преломления связаны соотношением

$$n_1\,sin\,\alpha_1=n_2\,sin\,\alpha_2\,.$$

Из $k_{1X}=k_{3X}$ следует соотношение $k_1\,sin\,\alpha_1=k_3\,sin\,\alpha_3$. Т.к. падающая и отражённая волны распространяются в одной среде, то $k_1=k_3$, откуда $\alpha_1=\alpha_3$ - угол отражения равен углу падения.



Найдём соотношения между величинами напряжённостей. Предположим, что векторы напряжённостей электрического и магнитного полей в падающей, прошедшей и отражённой волнах в некоторый момент времени имеют направления, указанные на рисунке. Тогда

$\vec{E}_1=\left(E_1\,cos\,\alpha_1, E_1\,sin\,\alpha_1, 0\right)$, $\vec{E}_2=\left(E_2\,cos\,\alpha_2, E_2\,sin\,\alpha_2, 0\right)$ и $\vec{E}_3=\left(E_3\,cos\,\alpha_1, -E_3\,sin\,\alpha_1, 0\right)$.

Условие $E_{1X}+E_{3X}=E_{2X}$ примет вид

$$E_{01}\,cos\,\alpha_1\,cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\,cos\,\alpha_1\,cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=E_{02}\,cos\,\alpha_2\,cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right)$$

Из $\varepsilon_1\left(E_{1Y}+E_{3Y}\right)=\varepsilon_2 E_{2Y}$ получаем равенство

$$E_{01}\,sin\,\alpha_1\,cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)-E_{03}\,sin\,\alpha_1\,cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_{02}\,sin\,\alpha_2\,cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right)$$

Получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} E_{01}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=E_{02}\cos\alpha_2\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right) \\ E_{01}\sin\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)-E_{03}\sin\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_{02}\sin\alpha_2\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right) \end{cases}$$

Из закона преломления $n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2$ следует, что уравнения выполняются в случае нормального падения волны на границу $\alpha_1=0$.

Предположим, что $\alpha_1\neq 0$. Первое уравнение умножаем на $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2$, а второе на $\cos\alpha_2$ и, вычитая из первого уравнения второе, получаем:

$$E_{01}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)-$$
$$+E_{03}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=0$$

Преобразуем это уравнение

$$\left(E_{01}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos(\varphi_1)+E_{03}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos(\varphi_3)\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$$
$$-\left(E_{01}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\sin(\varphi_1)+E_{03}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\sin(\varphi_3)\right)\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)=0$$

В этом уравнении коэффициенты при $\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ и $\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$E_{01}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos(\varphi_1)+E_{03}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\cos(\varphi_3)=0$$

$$E_{03}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\sin(\varphi_3)+E_{01}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\sin(\varphi_1)=0$$

выполняются одновременно при $\cos(\varphi_1)=\cos(\varphi_3)$ и $\sin(\varphi_1)=\sin(\varphi_3)$.

Перепишем эти условия в виде $\sin(\varphi_3)\cos(\varphi_1)-\cos(\varphi_3)\sin(\varphi_1)=0$ и получим, что $\sin(\varphi_3-\varphi_1)=0$, т.е. начальные фазы падающей и отражённой волн либо равны, либо отличаются друг от друга на π. Поэтому $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}=\pm 1$ (либо $\frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\varphi_3)}=\pm 1$). Тогда можно записать

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \right)}{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Для оптически прозрачных сред $\mu \approx 1$, поэтому $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. С учётом $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, $\sin\alpha_1 \neq 0$ можно провести некоторые преобразования

$$E_{03} = -E_{01} \frac{\left(\frac{n_2}{n_1} \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \right)}{\left(\frac{n_2}{n_1} \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 \right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{(\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_2)}{(\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right),$$

$$E_{03} = -E_{01} \frac{(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2)}{(\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{\left(\cos\left(2\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha_2 + \frac{\pi}{2}\right) \right)}{\left(\cos\left(2\alpha_1 - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) \right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right),$$

$$E_{03} = -E_{01} \frac{2\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \cos\left(\alpha_1 - \alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right)}{2\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2 - \frac{\pi}{2}\right) \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) = -E_{01} \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right).$$

Величины амплитуд E_{01} и E_{03} положительные.

Т.к. $\alpha_1 \le \pi/2$ и $\alpha_2 \le \pi/2$, то $\alpha_1+\alpha_2 \le \pi$, поэтому $tg(\alpha_1+\alpha_2) \ge 0$.

Следовательно, в случае $\alpha_1-\alpha_2 \ge 0$, (т.е. когда $tg(\alpha_1-\alpha_2) \ge 0$) должно быть $\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} = -1$ - фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на π.

В этом случае $\alpha_1 \ge \alpha_2$, поэтому $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$, т.е. волна отражается от оптически более плотной среды.

Случаю $\alpha_1-\alpha_2<0$ соответствует отражение от оптически менее плотной среды и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

Возможен случай, когда нет отражённой волны $E_{03}=0$.

Это возможно либо при $tg(\alpha_1-\alpha_2)=0$, т.е. $\alpha_1=\alpha_2$ - волна не преломляется, либо при $tg(\alpha_1+\alpha_2) \to +\infty$, т.е. $\alpha_1+\alpha_2 = \pi/2$ - волновые векторы преломлённого луча и отраженного луча взаимно перпендикулярны.

Тогда равенство E_{03}=0 равносильно $\frac{n_2}{n_1}\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = 0$. Но $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, поэтому $\frac{n_2}{n_1}\cos\alpha_1 = \sin\alpha_1$. Следовательно, если тангенс угла падения равен *относительному показателю преломления* двух сред

$$tg\alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$$

то при отражении света от границы между ними нет волны, плоскость поляризации которой совпадает с плоскостью падения. Этот угол называется *углом Брюстера*.

Теперь в системе уравнений

$$\begin{cases} E_{01}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1\right) + E_{03}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3\right) = E_{02}\cos\alpha_2\cos\left(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2\right) \\ E_{01}\sin\alpha_1\cos\left(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1\right) - E_{03}\sin\alpha_1\cos\left(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_3\right) = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}E_{02}\sin\alpha_2\cos\left(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2\right) \end{cases}$$

первое уравнение умножим на $\sin\alpha_1$, а второе на $\cos\alpha_1$ и сложим друг с другом.

$$2E_{01}\cos\alpha_1\sin\alpha_1\cos\left(\omega t - (k_{1X}x) + \varphi_1\right) = E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\cos\left(\omega t - (k_{2X}x) + \varphi_2\right)$$

Используем условие $k_{1X} = k_{2X}$

$$E_{01}\sin 2\alpha_1\left(\cos\left(\omega t - (k_{1X}x)\right)\cos(\varphi_1) - \sin\left(\omega t - (k_{1X}x)\right)\sin(\varphi_1)\right) =$$

$$E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\left(\cos\left(\omega t - (k_{1X}x)\right)\cos(\varphi_2) - \sin\left(\omega t - (k_{1X}x)\right)\sin(\varphi_2)\right)$$

$$\left(E_{01}\sin 2\alpha_1\cos(\varphi_1) - E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\cos(\varphi_2)\right)\cos\left(\omega t - (k_{1X}x)\right)$$

$$-\left(E_{01}\sin 2\alpha_1\sin(\varphi_1) - E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\sin(\varphi_2)\right)\sin\left(\omega t - (k_{1X}x)\right) = 0$$

В этом уравнении коэффициенты не зависят от времени, поэтому они равны нулю:

$$E_{01}\sin 2\alpha_1\cos(\varphi_1) - E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\cos(\varphi_2) = 0,$$

$$E_{01}\sin 2\alpha_1\sin(\varphi_1) - E_{02}\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\sin(\varphi_2) = 0.$$

Это возможно, если $cos(\varphi_1)=cos(\varphi_2)$ и $sin(\varphi_1)=sin(\varphi_2)$. Объединяем эти соотношения в одно равенство $sin(\varphi_2)cos(\varphi_1)=sin(\varphi_1)cos(\varphi_2)$ или $sin(\varphi_2-\varphi_1)=0$. Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на π.

Тогда $\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}=\pm1$ (либо $\frac{sin(\varphi_1)}{sin(\varphi_2)}=\pm1$). Поэтому

$$E_{02}=E_{01}\frac{sin\,2\alpha_1}{\left(sin\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}cos\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2\right)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right).$$

Для оптически прозрачных сред $\mu\approx1$, поэтому $n\approx\sqrt{\varepsilon}$. С учётом $n_1\,sin\,\alpha_1=n_2\,sin\,\alpha_2$, $sin\,\alpha_1\neq0$ можно провести некоторые преобразования

$$E_{02}=E_{01}\frac{2\,sin\,\alpha_1}{\left(cos\,\alpha_2+\frac{n_2}{n_1}cos\,\alpha_1\right)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right)=E_{01}\frac{2\,cos\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{(sin\,\alpha_2\,cos\,\alpha_2+sin\,\alpha_1\,cos\,\alpha_1)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right),$$

$$E_{02}=E_{01}\frac{4\,cos\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{(sin\,2\alpha_2+sin\,2\alpha_1)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right)=E_{01}\frac{4\,cos\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{\left(cos\left(2\alpha_2-\frac{\pi}{2}\right)+cos\left(2\alpha_1-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right),$$

$$E_{02}=E_{01}\frac{2\,cos\,\alpha_1\,sin\,\alpha_2}{cos(\alpha_2-\alpha_1)\,sin(\alpha_2+\alpha_1)}\left(\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}\right).$$

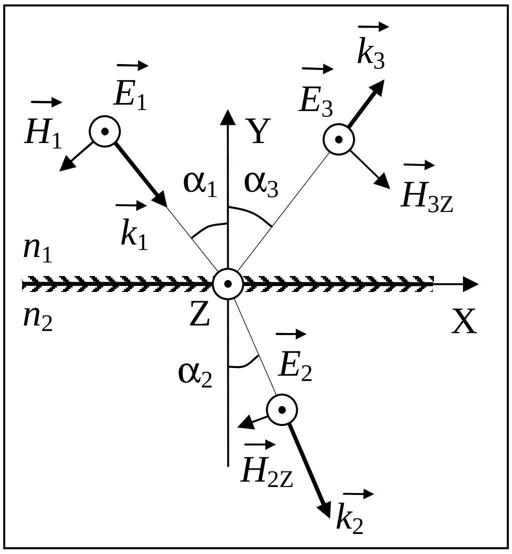
Величины амплитуд E_{01} и E_{02} положительные.

Т.к. $\alpha_1\le\pi/2$ и $\alpha_2\le\pi/2$, то $\alpha_1+\alpha_2\le\pi$, поэтому $sin(\alpha_1+\alpha_2)\ge0$ и $cos(\alpha_2-\alpha_1)\ge0$. Следовательно, должно быть $\frac{cos(\varphi_1)}{cos(\varphi_2)}=1$, т.е. фазы прошедшей и падающей волн совпадают.

2) Рассмотрим случай, когда в падающей волне вектор $\vec{E}_1=(0,0,E_1)$ параллелен границе, а вектор $\vec{H}_1$ лежит в плоскости (XY), т.е. $\vec{H}_1=(H_{1X},H_{1Y},0)$. Волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. Так как на границе должны выполняться условия $\vec{E}_{1t}+\vec{E}_{3t}=\vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1t}+\vec{H}_{3t}=\vec{H}_{3t}$, то

$$E_{3X}=E_{2X}\ \text{и}\ E_1+E_{3Z}=E_{2Z},\ H_{3Z}=H_{2Z}\ \text{и}\ H_{1X}+H_{3X}=H_{2X}.$$

Кроме того, на границе выполняются условия



$\vec{D}_{1n}+\vec{D}_{3n}=\vec{D}_{2n}$ и $\vec{B}_{1n}+\vec{B}_{3n}=\vec{B}_{2n}$, поэтому $\varepsilon_1 E_{3Y}=\varepsilon_2 E_{2Y}$, $\mu_1\left(H_{1Y}+H_{3Y}\right)=\mu_2 H_{2Y}$.

Координаты E_{2X}, E_{3X}, E_{2Y}, E_{3Y}, H_{2Z}, H_{3Z}, не связаны никакими уравнениями с параметрами падающей волны. Поэтому их можно не рассматривать, т.е. считать равными нулю. Следовательно, прошедшая и отражённая волны являются линейно-поляризованными, т.к. $\vec{E}_2=\left(0,0,E_2\right)$, $\vec{E}_3=\left(0,0,E_3\right)$, $\vec{H}_2=\left(H_{2X},H_{2Y},0\right)$, $\vec{H}_3=\left(H_{3X},H_{3Y},0\right)$.

Законы преломления остаются прежними $\alpha_3=\alpha_1$, $n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2$.

Найдём соотношения между величинами напряжённостей. Предположим, что векторы напряжённостей электрического и магнитного полей в падающей, прошедшей и отражённой волнах в некоторый момент времени имеют направления, указанные на рисунке. Поэтому $\vec{H}_1=\left(-H_1\cos\alpha_1,-H_1\sin\alpha_1,0\right)$, $\vec{H}_2=\left(-H_2\cos\alpha_2,-H_2\sin\alpha_2,0\right)$ и $\vec{H}_3=\left(H_3\cos\alpha_1,-H_2\sin\alpha_1,0\right)$.

Тогда условие $H_{1X}+H_{3X}=H_{2X}$ примет вид

$$\begin{aligned}&-H_{10}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+H_{03}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=\\&=-H_{02}\cos\alpha_2\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right)\end{aligned}$$

С учётом $H=E\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}$

$$\begin{aligned}&-E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=\\&=-E_{02}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}}\cos\alpha_2\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right)\end{aligned}$$

Условие $E_1+E_3=E_2$ примет вид

$$E_{10}\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=E_{02}\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right)$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -E_{10}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)= \\ =-E_{02}\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right) \\ E_{10}\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=E_{02}\cos\left(\omega t-\left(k_{2X}x\right)+\varphi_2\right) \end{cases}$$

Второе уравнение умножим на $\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\mu_2\mu_0}}\cos\alpha_2$ и суммируем первое и второе:

$$E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_1\right)+E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)+\varphi_3\right)=0$$

Преобразуем

$$\begin{gathered} E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\left(\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\cos\left(\varphi_1\right)-\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\sin\left(\varphi_1\right)\right) \\ +E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\left(\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\cos\left(\varphi_3\right)-\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\sin\left(\varphi_3\right)\right)=0 \end{gathered}$$

и получим

$$\begin{gathered} \left(E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\varphi_1\right)+E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\varphi_3\right)\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right) \\ -\left(E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\sin\left(\varphi_1\right)+E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\sin\left(\varphi_3\right)\right)\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)=0 \end{gathered}$$

В этом уравнении коэффициенты при $\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ и $\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\varphi_1\right)+E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\cos\left(\varphi_3\right)=0$$

$$E_{10}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\sin\left(\varphi_1\right)+E_{03}\left(\cos\alpha_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)\sin\left(\varphi_3\right)=0$$

выполняются, если $\cos\left(\varphi_1\right)=\cos\left(\varphi_3\right)$ и $\sin\left(\varphi_1\right)=\sin\left(\varphi_3\right)$. Объединяем эти соотношения в одно равенство $\sin\left(\varphi_3\right)\cos\left(\varphi_1\right)=\sin\left(\varphi_1\right)\cos\left(\varphi_3\right)$ или $\sin\left(\varphi_3-\varphi_1\right)=0$. Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на π.

Тогда $\dfrac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_3\right)}=\pm1$ (либо $\dfrac{\sin\left(\varphi_1\right)}{\sin\left(\varphi_3\right)}=\pm1$). Поэтому

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}\right).$$

Для оптически прозрачных сред $\mu \approx 1$, поэтому $n \approx \sqrt{\varepsilon}$. С учётом $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$, можно провести некоторые преобразования

$$E_{03} = -E_{10} \frac{(n_2 \cos\alpha_2 - n_1 \cos\alpha_1)}{(n_2 \cos\alpha_2 + n_1 \cos\alpha_1)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}\right) = -E_{10} \frac{(\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1)}{(\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 \cos\alpha_1)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}\right)$$

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}\right)$$

Т.к. $\alpha_1 \le \pi/2$ и $\alpha_2 \le \pi/2$, то $\alpha_1 + \alpha_2 \le \pi$, поэтому $tg(\alpha_1 + \alpha_2) \ge 0$.

Следовательно, в случае $\alpha_1 - \alpha_2 \ge 0$, (т.е. когда $\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \ge 0$) должно быть

$\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)} = -1$ - фаза отражённой волны отличается от фазы падающей волны на π.

В этом случае $\alpha_1 \ge \alpha_2$, поэтому $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} > 1$, т.е. волна отражается от оптически более плотной среды.

Случаю $\alpha_1 - \alpha_2 < 0$ соответствует отражение от оптически менее плотной среды и фаза отражённой волны совпадает с фазой падающей волны.

В системе

$$\begin{cases} -E_{10} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = \\ = -E_{02} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \\ E_{10} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) + E_{03} \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_3) = E_{02} \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2) \end{cases}$$

второе уравнение умножим на $\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1$ и вычтем из второго уравнения первое:

$$2E_{10} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 \cos(\omega t - (k_{1X} x) + \varphi_1) = E_{02} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 + E_{02} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2\right) \cos(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Т.к. $k_{1X} = k_{2X}$, то

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\left(\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\cos\left(\varphi_1\right)-\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\sin\left(\varphi_1\right)\right)$$

$$-E_{02}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+E_{02}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)\left(\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\cos\left(\varphi_2\right)-\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)\sin\left(\varphi_2\right)\right)=0$$

откуда

$$\left(2E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\cos\left(\varphi_1\right)-E_{02}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)\cos\left(\varphi_2\right)\right)\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$$

$$-\left(2E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\sin\left(\varphi_1\right)-E_{02}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)\sin\left(\varphi_2\right)\right)\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)=0$$

В этом уравнении коэффициенты при $\cos\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ и $\sin\left(\omega t-\left(k_{1X}x\right)\right)$ не зависят от времени. Поэтому они должны быть равны нулю. Равенства

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\cos\left(\varphi_1\right)-E_{02}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)\cos\left(\varphi_2\right)=0$$

$$2E_{10}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\sin\left(\varphi_1\right)-E_{02}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)\sin\left(\varphi_2\right)=0$$

выполняются, если $\cos\left(\varphi_1\right)=\cos\left(\varphi_2\right)$ и $\sin\left(\varphi_1\right)=\sin\left(\varphi_2\right)$. Объединяем эти соотношения в одно равенство $\sin\left(\varphi_2\right)\cos\left(\varphi_1\right)=\sin\left(\varphi_1\right)\cos\left(\varphi_2\right)$ или $\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)=0$. Поэтому начальные фазы прошедшей и падающей волн, либо равны, либо отличаются на π.

Тогда $\dfrac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}=\pm1$ (либо $\dfrac{\sin\left(\varphi_1\right)}{\sin\left(\varphi_2\right)}=\pm1$). Поэтому

$$E_{02}=E_{10}\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)$$

Для оптически прозрачных сред $\mu\approx1$, поэтому $n\approx\sqrt{\varepsilon}$. С учётом $n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2$, можно провести некоторые преобразования

$$E_{02}=E_{10}\frac{2n_1\cos\alpha_1}{\left(n_1\cos\alpha_1+n_2\cos\alpha_2\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)=E_{10}\frac{2\sin\alpha_2\cos\alpha_1}{\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)$$

Поэтому должно быть $\dfrac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}=1$, т.е. фазы преломлённой и падающей волн одинаковые.

В итоге, *закон преломления* можно сформулировать следующим образом. Волновые векторы всех трёх волн лежат в одной плоскости падения. Угол падения равен углу отражения, угол преломления связан с углом отражения соотношением

$$n_1 \, sin\,\alpha_1 = n_2 \, sin\,\alpha_2 \,.$$

Фазы падающей и прошедшей волн одинаковые. Фаза отраженной волны отличается от фазы падающей волны на π при отражении от оптически более плотной среды.

Падающая волна, отражённая и преломлённая волны поляризованы одинаково. Но если волна, поляризованная в плоскости падения, падает под углом Брюстера $tg\alpha_B = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$, то отраженная волна отсутствует.

Вектор Пойнтинга падающей волны представим в виде суммы вектора, параллельного границе и перпендикулярного к границе $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_t + \vec{\Pi}_n$.

Поток энергии волны через границу $\iint\limits_S \left(\vec{\Pi}, d\vec{S}\right) = \iint\limits_S \Pi_n dS$ определяется нормальной составляющей вектор Пойнтинга.

Но

$$\vec{\Pi} = \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = \left(\left(\vec{E}_n + \vec{E}_t\right) \times \left(\vec{H}_n + \vec{H}_t\right)\right) = \left(\vec{E}_n \times \vec{H}_n\right) + \left(\vec{E}_n \times \vec{H}_t\right) + \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_n\right) + \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t\right).$$

Поэтому $\vec{\Pi}_t = \left(\vec{E}_n \times \vec{H}_n\right) + \left(\vec{E}_n \times \vec{H}_t\right) + \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_n\right)$ и $\vec{\Pi}_n = \left(\vec{E}_t \times \vec{H}_t\right)$.

Так на границе выполняются равенства $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ и $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_{2t}$, то

$$\vec{\Pi}_{1n} = \left(\vec{E}_{1t} \times \vec{H}_{1t}\right) = \left(\vec{E}_{2t} \times \vec{H}_{2t}\right) = \vec{\Pi}_{2n}.$$

Это равенство выражает закон сохранения энергии: при переходе через границу раздела диэлектриков величина нормальной составляющей вектора Пойнтинга не меняется, что означает, что энергия на границе не теряется.

В общем случае падения электромагнитной волны на границу раздела диэлектриков будут наблюдаться волна, отраженная от границы, и волна, прошедшая через границу. Так как $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_t^{ПАДАЮЩАЯ} + \vec{E}_t^{ОТРАЖЁННАЯ}$ и $\vec{H}_{1t} = \vec{H}_t^{ПАДАЮЩАЯ} + \vec{H}_t^{ОТРАЖЁННАЯ}$, то на границе выполняется равенство $\vec{\Pi}_n^{ПАДАЮЩАЯ} + \vec{\Pi}_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \vec{\Pi}_n^{ПРОШЕДШАЯ}$.

Падающая волна

$$\vec{\Pi} = \vec{E}\times\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_X & \vec{e}_Y & \vec{e}_Z \\ E_X & E_Y & E_Z \\ H_X & H_Y & H_Z \end{vmatrix} = \vec{e}_X\left(E_Y H_Z - E_Z H_Y\right) + \vec{e}_Y\left(E_Z H_X - E_X H_Z\right) + \vec{e}_Z\left(E_X H_Y - E_Y H_X\right)$$

1) Падающая волна поляризована в плоскости падения $\vec{E}_1 = \left(E_{1X}, E_{1Y}, 0\right)$, $\vec{H}_1 = \left(0,0,H_1\right)$

Тогда

$$\Pi_n^{ПАДАЮЩАЯ} = \Pi_{1Y} = E_{1Z}H_{1X} - E_{1X}H_{1Z} = -E_{1X}H_1$$

$$E_X = E_1\cos\alpha_1 = E_{01}\cos\alpha_1\cos\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_1\right)$$

$$H_1 = E_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}E_{01}\cos\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_1\right)$$

$$\Pi_n^{ПАДАЮЩАЯ} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}\left(E_{01}\right)^2\cos\alpha_1\cos^2\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_1\right)$$

Отражённая волна $\vec{E}_3 = \left(E_3\cos\alpha_1, -E_3\sin\alpha_1, 0\right)$

$$E_{3X} = E_3\cos\alpha_1 = -E_{01}\frac{tg\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}{tg\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)\cos\alpha_1\cos\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_3\right)$$

$$H_{3Z} = -H_3 = -E_3\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}E_{01}\frac{tg\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}{tg\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)\cos\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_3\right)$$

$$\Pi_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \Pi_{3Y} = -E_{3X}H_{3Z}$$

$$\Pi_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = -E_{3X}H_{3Z} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}\left(E_{01}\frac{tg\left(\alpha_1-\alpha_2\right)}{tg\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}\right)^2\cos\alpha_1\cos^2\left(\omega t - \left(k_{1X}x\right) + \varphi_3\right)$$

(Здесь учтено, что $\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_2\right)}\right)^2 = 1$).

Прошедшая волна $\vec{E}_2 = \left(E_2\cos\alpha_2, E_2\sin\alpha_2, 0\right)$

$$E_{2X} = E_2\cos\alpha_2 = E_{01}\frac{2\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_3\right)}\right)\cos\alpha_2\cos\left(\omega t - \left(k_{2X}x\right) + \varphi_2\right)$$

$$H_{2Z} = H_2 = E_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}}E_{01}\frac{2\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\cos\left(\alpha_2-\alpha_1\right)\sin\left(\alpha_2+\alpha_1\right)}\left(\frac{\cos\left(\varphi_1\right)}{\cos\left(\varphi_3\right)}\right)\cos\left(\omega t - \left(k_{2X}x\right) + \varphi_2\right)$$

$$\Pi_n^{ПРОШЕДШАЯ} = \Pi_{2Y} = -E_{2X} H_{2Z}$$

$$\Pi_n^{ПРОШЕДШАЯ} = -E_{2X} H_{2Z} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left(E_{01} \frac{2\cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)} \right) \right)^2 \cos\alpha_2 \cos^2(\omega t - (k_{2X} x) + \varphi_2)$$

Интенсивность – среднее значение величины вектора Пойнтинга

$$I_n^{ПАДАЮЩАЯ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} (E_{01})^2 \cos\alpha_1$$

$$I_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \left(E_{01} \frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 \cos\alpha_1$$

$$I_n^{ПРОШЕДШАЯ} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \left(E_{01} \frac{2\cos\alpha_1 \sin\alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1)\sin(\alpha_2 + \alpha_1)} \right)^2 \cos\alpha_2$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{I_n^{ОТРАЖЁННАЯ}}{I_n^{ПАДАЮЩАЯ}} = \left(\frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2$$

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{I_n^{ПРОШЕДШАЯ}}{I_n^{ПАДАЮЩАЯ}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\mu_1}{\mu_2}} \frac{4\cos\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{n_2}{n_1} \frac{4\cos\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$D = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \frac{4\cos\alpha_1 \sin^2\alpha_2 \cos\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{4\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$D = \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \left(\frac{tg(\alpha_1 - \alpha_2)}{tg(\alpha_1 + \alpha_2)} \right)^2 + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)} + \frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2 - \alpha_1)\sin^2(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

$$R + D = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)\cos^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\cos^2(\alpha_1+\alpha_2)+\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 =$$
$$\left(\sin(\alpha_1-\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)\right)^2+4\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 =$$
$$\left(\left(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)-\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)\right)\left(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)-\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)\right)\right)^2$$
$$+4\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 =$$
$$\left(\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_1)-\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_2)\right)^2+4\cos\alpha_1 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2 =$$
$$\left(\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_2)\right)^2$$

$$\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)=$$
$$\left(\left(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2)+\sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)\right)\left(\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)+\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)\right)\right)^2=$$
$$\left(\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_1)+\cos(\alpha_2)\sin(\alpha_2)\right)^2$$

$$R+D=1$$

(Это выражение выражает собой закон сохранения энергии).

При нормальном падении, когда $\alpha_1 << 1$ получаем, что из $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ следует $n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$, $\cos\alpha_1 \approx 1$, $\cos\alpha_2 \approx 1$, тогда

$$R=\left(\frac{tg(\alpha_1-\alpha_2)}{tg(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^2 \approx \frac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}=\frac{\left(\alpha_1-\frac{n_1}{n_2}\alpha_1\right)^2}{\left(\alpha_1+\frac{n_1}{n_2}\alpha_1\right)^2}=\frac{\left(1-\frac{n_1}{n_2}\right)^2}{\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)^2}=\frac{(n_2-n_1)^2}{(n_2+n_1)^2},$$

$$D=\frac{\sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2}{\cos^2(\alpha_2-\alpha_1)\sin^2(\alpha_2+\alpha_1)} \approx \frac{2\alpha_1 2\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_1)^2}=\frac{4\alpha_1\frac{n_1}{n_2}\alpha_1}{\left(\frac{n_1}{n_2}\alpha_1+\alpha_1\right)^2}=\frac{4\frac{n_1}{n_2}}{\left(\frac{n_1}{n_2}+1\right)^2}=\frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}.$$

2) Падающая волна поляризована в плоскости, перпендикулярной плоскости падения. $\vec{E}_1=(0,0,E_1)$, $\vec{E}_2=(0,0,E_2)$, $\vec{E}_3=(0,0,E_3)$, ,.

$\vec{H}_1=(-H_1\cos\alpha_1,-H_1\sin\alpha_1,0)$, $\vec{H}_2=(-H_2\cos\alpha_2,-H_2\sin\alpha_2,0)$, $\vec{H}_3=(H_3\cos\alpha_1,-H_2\sin\alpha_1,0)$.

$$H=E\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}$$

$$\Pi_n^{ПАДАЮЩАЯ}=\Pi_{1Y}=E_{1Z}H_{1X}-E_{1X}H_{1Z}=E_{1Z}H_{1X}$$

$$\Pi_n^{ПАДАЮЩАЯ}=-E_1H_1\cos\alpha_1=-\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}}(E_{01})^2\cos\alpha_1\cos^2\left(\omega t-(k_{1X}x)+\varphi_1\right)$$

$$\Pi_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \Pi_{3Y} = E_{3Z} H_{3X} = E_3 H_3 \cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \left(E_3\right)^2 \cos\alpha_1$$

С учётом соотношение между амплитудами отражённой и падающей волн:

$$E_{03} = -E_{10} \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_3)}\right)$$

получаем

$$\Pi_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \left(E_{10} \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)} \right)^2 \cos\alpha_1 \cos^2\left(\omega t - \left(k_{1X} x\right) + \varphi_3\right).$$

Для прошедшей волны

$$\Pi_n^{ПРОШЕДШАЯ} = \Pi_{2Y} = E_{2Z} H_{2X} = -E_2 H_2 \cos\alpha_2 = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}} \left(E_2\right)^2 \cos\alpha_2$$

но

$$E_{02} = E_{10} \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2\right)} \left(\frac{\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}\right),$$

откуда

$$\Pi_n^{ПРОШЕДШАЯ} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}} \left(E_{10} \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2\right)} \right)^2 \cos\alpha_2 \cos^2\left(\omega t - \left(k_{2X} x\right) + \varphi_2\right)$$

Тогда выражения для интенсивностей

$$I_n^{ПАДАЮЩАЯ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \left(E_{01}\right)^2 \cos\alpha_1$$

$$I_n^{ОТРАЖЁННАЯ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\mu_1\mu_0}} \left(E_{10} \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos\alpha_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos\alpha_1\right)} \right)^2 \cos\alpha_1$$

$$I_n^{ПРОШЕДШАЯ} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\mu_2\mu_0}}\left(E_{10}\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)}\right)^2\cos\alpha_2$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{I_n^{ОТРАЖЁННАЯ}}{I_n^{ПАДАЮЩАЯ}} = \left(\frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2+\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1\right)}\right)^2 = \left(\frac{\left(n_2\cos\alpha_2-n_1\cos\alpha_1\right)}{\left(n_2\cos\alpha_2+n_1\cos\alpha_1\right)}\right)^2$$

Коэффициент прозрачности (пропускания)

$$D = \frac{I_n^{ПРОШЕДШАЯ}}{I_n^{ПАДАЮЩАЯ}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2\mu_1}{\varepsilon_1\mu_2}}\left(\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_1+\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_2\right)}\right)^2\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1\cos\alpha_1}{\left(n_1\cos\alpha_1+n_2\cos\alpha_2\right)}\right)^2\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}$$

$$D = \frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\left(n_1\cos\alpha_1+n_2\cos\alpha_2\right)^2}$$

$$R+D = \left(\frac{\left(n_2\cos\alpha_2-n_1\cos\alpha_1\right)}{\left(n_2\cos\alpha_2+n_1\cos\alpha_1\right)}\right)^2+\frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\left(n_1\cos\alpha_1+n_2\cos\alpha_2\right)^2}$$

$$R+D = \frac{\left(n_2\cos\alpha_2-n_1\cos\alpha_1\right)^2+4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\left(n_2\cos\alpha_2+n_1\cos\alpha_1\right)^2}=1$$

При нормальном падении, когда $\alpha_1 << 1$ получаем, что из $n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2$ следует $n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2$, $\cos\alpha_1\approx 1$, $\cos\alpha_2\approx 1$, тогда

$$R = \frac{\left(n_2\cos\alpha_2-n_1\cos\alpha_1\right)^2}{\left(n_2\cos\alpha_2+n_1\cos\alpha_1\right)^2}\approx\frac{\left(n_2-n_1\right)^2}{\left(n_2+n_1\right)^2}$$

$$D = \frac{4n_1n_2\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\left(n_1\cos\alpha_1+n_2\cos\alpha_2\right)^2}\approx\frac{4n_1n_2}{\left(n_1+n_2\right)^2}$$

Следовательно, при малых углах падения коэффициенты отражения и пропускания для обоих случаев поляризации *одинаковые*.