Всероссийская студенческая олимпиада (Всероссийский тур)
по физике (в технических вузах)
2016 г.

III тур Всероссийской физической олимпиады студентов технических вузов прошел 20 мая 2016 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э. Баумана.

Победители в командном зачете: команда Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, набравшая 107 баллов - первое место, команда Московского государственного технического университета им Н.Э. Баумана, набравшая 107 баллов - первое место, команда Московского авиационного института, набравшая 82 балла - третье место.

Победители в личном зачете: Рогожинский Константин Сергеевич, МГТУ им. Н.Э. Баумана – первое место, Конаныхин Роман Андреевич, СПб ПТУ – второе место, Акимов Фёдор Александрович, МАИ - третье место.

Задачи олимпиады

Задача 1. Траектории двух частиц на плоскости представляют из себя окружности радиусами a и b, расстояние между центрами которых равно $c < a + b$. Частицы двигаются с постоянными по модулю скоростями. В начальный момент времени частицы находятся на максимальном удалении друг от друга и движутся в одну сторону. Определить соотношение между скоростями частиц $\frac{V_1}{V_2}$, при котором частицы встретятся в ближайшей точке пересечения траекторий.

Задача 2. Профиль впадины определяется уравнением $y = ax^2$. Во впадину с высоты H скатывается шарик массы m и радиуса $R = \frac{1}{4a}$. Определить силу давления шарика на дне впадины в низшей точке, считая, что проскальзывание отсутствует.

Задача 3. Тонкая жесткая проволока массой m и длиной l свернута в спираль по закону в полярной системе координат $r = \frac{l}{2} e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}$. Определить период колебаний проволоки относительно начала координат.

Задача 4. Пусть в некотором малом объеме содержится N_0 молекул газа с дипольным моментом равным p. Газ находится во внешнем однородном электрическом поле, вектор напряженности которого равен E и направлен вдоль оси x. Определить число молекул, вектор дипольного момента которых составляет с осью x угол в пределах от нуля до $\frac{\pi}{2}$, если температура газа равна T.

Задача 5. Две горизонтальные пластины ширины L расположены на расстоянии a друг от друга и заряжены поверхностной плотностью заряда σ разного знака. Определить напряженность электрического поля в точке О, лежащей на плоскости, перпендикулярной пластинам, проходящей через границы обоих плоскостей и отстоящей на расстояние y от верхней пластины. Рассмотреть случай $L \to \infty$

Задача 6. Шарик радиуса b, заряд которого q, находящийся на большом удалении от сферического проводящего слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны r и R соответственно, начинает двигаться строго по радиусу и пролетает через радиальное цилиндрическое отверстие в проводящем слое радиуса a. Определить скорость шарика в центре сферического проводящего слоя, если $r \gg a \gg b$.

Задача 7. На оси кольца радиуса R с током I находится магнитный диполь массой m с дипольным моментом равным p_m, ориентированным вдоль силовой линии магнитного поля. Диполь может перемещаться только вдоль оси кольца. Определить период малых колебаний диполя.

Задача 8. Гибкий намагниченный вдоль оси магнитопровод, в форме длинного цилиндра диаметром d и длиной $L>>d$ свернули в кольцо, зазор между плоскими торцами $\delta << L$. Вектор намагниченности в любой точке цилиндра стал равен I. Определить силу притяжения между торцами цилиндра и индукцию магнитного поля на оси магнитопровода.

Решение задач

Решение задачи 1. Пусть проекция точки встречи h на отрезок c делят его на отрезки d и e. $c = d + e$

Из прямоугольных треугольников

$a^2 - h^2 = d^2, b^2 - h^2 = e^2$

$a^2 - b^2 = d^2 - e^2 = c\,(c - 2e)$

$e = \frac{1}{2c}(c^2 + b^2 - a^2)$

$a^2 - b^2 = d^2 - e^2 = c\,(2d - c)$

$d = \frac{1}{2c}(c^2 + a^2 - b^2)$

Время движения первой точки $t = \frac{2\pi a}{2\pi V_1}\left(\pi - arccos\frac{d}{a}\right)$

Время движения второй точки $t = \frac{2\pi b}{2\pi V_2}\left(\pi - arccos\frac{e}{b}\right)$

$\frac{V_1}{V_2} = \frac{b}{a}\,\frac{arccos\frac{(a^2-c^2-b^2)}{2cb}}{arccos\frac{(b^2-c^2-a^2)}{2ca}}$

Решение задачи 2 При малых отклонениях от положения равновесия угол отклонения радиуса шарика перпендикулярного поверхности впадины от вертикали равен $\alpha = 2ax$.

Откуда радиус кривизны в низшей точке впадины $r = \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{2a}$

Следовательно радиус кривизны траектории центра масс $r_c = r - R = \frac{1}{4a}$

Скорость в низшей точке из закона сохранения энергии

$m\frac{V^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} = \frac{7}{10}mV^2 = mg(H - R),\ V^2 = \frac{10}{7}g(H - R)$

Сила давления $F = mg + m\frac{V^2}{r_c} = mg\left(1 + \frac{40}{7}a\left(H - \frac{1}{4a}\right)\right) = \frac{mg}{7}(40Ha - 3)$

Решение задачи 3. Определим угол α между радиус-вектором и спиралью

$dr = \frac{a}{\sqrt{3}}e^{\frac{\theta}{\sqrt{3}}}\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,r d\theta$

$\cos\alpha = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$

Тогда момент инерции $I = \int dm r^2 = \int\frac{dr}{\cos\alpha}\frac{m}{l}r^2 = \frac{1}{3}m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = m\frac{l^2}{12}$

Положение центра масс:

$x_c = \frac{1}{m}\int dm\, x = \frac{1}{m}\int\frac{dr}{\cos\alpha}\frac{m}{l}r\cos\theta = \frac{a^2}{\sqrt{3}l\cos\alpha}\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\, d\theta =$

$\frac{a^2}{2l\cos\alpha}\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\, d\frac{2\theta}{\sqrt{3}} = \frac{a^2}{2l\cos\alpha}\left(e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta + \int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\sin\theta\, d\theta\right) =$

$$\frac{a^2}{2l\cos\alpha}\left(e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\sin\theta\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\,\mathrm{d}\sin\theta\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\,d\theta=\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\sin\theta\right)=\frac{7}{4\sqrt{3}}\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\,d\theta$$

$$x_c=\ \frac{a^2}{\sqrt{3}l\cos\alpha}\int e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\,d\theta=\frac{a^2}{\sqrt{3}l\cos\alpha}\frac{2\sqrt{3}}{7}\left(e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\sin\theta\right)\Big/_{-\infty}^{0}=\frac{2a^2}{7l\cos\alpha}=\frac{l}{7}$$

$$y_c=\frac{a^2}{l}\left(e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\theta}{\sqrt{3}}}\cos\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{7}=\frac{\sqrt{3}l}{14}$$

$$r_c=\ \frac{l}{7}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1}=\frac{l}{2\sqrt{7}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m\frac{l^2}{12}}{mg\frac{l}{2\sqrt{7}}}}=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{7}l}{6g}}$$

Решение задачи 4. Учитывая при отсутствии электрического поля равновероятность всех направлений определим функцию распределения по α

$$f(\alpha)=\ \frac{dN}{N_0d\alpha}=\ \frac{N_0}{4\ \pi}\ \frac{2\pi p\sin\alpha p d\alpha}{p^2}\ \frac{1}{N_0d\alpha}=\ \frac{\sin\alpha}{2}$$

Энергия электрического диполя в электрическом поле

$$W=-\bar{p}\bar{E}=-pE\cos\alpha$$

При наличии электрического поля с учетом распределения Больцмана

$$f(\alpha)=\ A\ \frac{\sin\alpha}{2}\ e^{\frac{pE\cos\alpha}{kT}}$$

Откуда нормируем $N\ =N_0\,A\int\frac{\sin\alpha}{2}\ e^{\frac{pE\cos\alpha}{kT}}d\alpha=A\frac{N_0}{2}\frac{kT}{pE}\int_{-1}^{1}e^{y}\,dy=$

$$\frac{N_0}{2}\frac{kT}{pE}A\left(e^{\frac{pE}{kT}}-e^{\frac{-pE}{kT}}\right)=N_0\ ,\ \ A=\frac{2pE}{kT}\left(\frac{1}{\left(e^{\frac{pE}{kT}}-e^{\frac{-pE}{kT}}\right)}\right)$$

Далее $N=N_0\frac{2pE}{kT}\left(\frac{1}{\left(e^{\frac{pE}{kT}}-e^{\frac{-pE}{kT}}\right)}\right)\frac{1}{2}\ \frac{kT}{pE}\left(e^{\frac{pE}{kT}}-1\right)=N_0\left(\frac{\left(1-e^{\frac{-pE}{kT}}\right)}{\left(1-e^{\frac{-2pE}{kT}}\right)}\right)=$

$$\frac{N_0}{\left(1+e^{\frac{-pE}{kT}}\right)}$$

Решение задачи 5. Пусть x - расстояние от тонкой полоски на пластине шириной dx, параллельной её границе.

Угол α - между радиус- вектором, проведенным из точки O к полоске и вертикалью.

$x=y\,tg\alpha,\ dx=\frac{y\,d\alpha}{\cos^2\alpha},\ \ dE=\frac{\sigma\mathrm{dx}}{2\pi\varepsilon_o r}=\frac{\sigma\mathrm{d}\alpha}{2\pi\varepsilon_o\cos\alpha}$

От верхней пластины :

$$E_y=\int_0^{\alpha_1}\frac{\sigma\mathrm{d}\alpha\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_o\cos\alpha}\ =\ \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ \alpha_1$$

$$E_x=\int_0^{\alpha_1}\frac{\sigma\mathrm{d}\alpha\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_o\cos\alpha}\ =\ \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ \ln\frac{1}{\cos\alpha_1}$$

От нижней пластины :

$$E_y=\int_0^{\alpha_2}\frac{\sigma\mathrm{d}\alpha\cos\alpha}{2\pi\varepsilon_o\cos\alpha}\ =\ -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ \alpha_2$$

$$E_x=\int_0^{\alpha_2}\frac{\sigma\mathrm{d}\alpha\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_o\cos\alpha}\ =\ -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ \ln\frac{1}{\cos\alpha_2}$$

Для двух пластин:

$$E_y = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{1}{\cos\alpha_1} - \ln\frac{1}{\cos\alpha_2}\right) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y+a}{x}} = -\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(1+\frac{a}{y}\right)$$

Решение задачи 6. При движении в вне сферического слоя заряд будет взаимодействовать с наведенным отрицательным зарядом на внешней поверхности сферического слоя и ускоряться вплоть до входа в отверстие. Далее, пройдя отверстие, заряд будет взаимодействовать с наведенным отрицательным зарядом на внутренней поверхности сферического слоя и тормозиться при движении в центр.

Начальная энергия равна энергии шарика радиуса b.

$$W_н = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 b} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 b}$$

Конечная энергия электрического поля равна энергии сферического конденсатора радиусами b и r, плюс энергия шара радиуса R.

$$W_к = \frac{q\Delta\varphi}{2} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r}\right) + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$$

Закон сохранения энергии $W_н - W_к = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{mV^2}{2}$

Решение задачи 7. Магнитное поле вдоль оси x.

$$B = \mu_0 \frac{I\, 2\pi R}{4\pi r^2}\frac{R}{r} = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(\sqrt{(R^2+x^2)}\right)^3}$$

$$F = p_m\frac{dB}{dx} = -\frac{p_m\mu_0 I R^2}{2}\frac{3}{2}\frac{2x}{\left(\sqrt{(R^2+x^2)}\right)^5} = m\ddot{x}$$

$$x \ll R \qquad m\ddot{x} + \frac{3p_m\mu_0 I}{2R^3}x = 0,\ \ \ddot{x} + \frac{3p_m\mu_0 I}{2mR^3}x = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3p_m\mu_0 I}{2mR^3}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^3}{3p_m\mu_0 I}}.$$

Решение задачи 8. Получился тороидальный магнитопровод равномерно намагниченный.

$$\oint Hdl = 0, H = 0$$

$$\frac{B}{\mu_0} = H + M = M$$

$$\oint Idl = I_m,\ i_m = M$$

Для более удобного определения силы притяжения заменим линейную плотность тока намагничивания i_m током I соленоида, намотанного по всей длине магнитопровода с плотностью намотки n $(i_m = nI)$.

Считаем, что выводы обмотки магнитопровода с током I закорочены. Значит ЭДС индукции в обмотке отсутствует, и магнитное поле B и поток Ф остаются неизменными. Следовательно энергия в магнитопроводе сохраняется неизменной. Отодвинем магнитопроводы на dx $(dx \lll L)$. Индукция магнитного поля в зазоре и в магнитопроводе одинаковы.

Работа внешних сил $A = Fdx$ равна энергии магнитного поля в зазоре

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0}\frac{\pi d^2}{4}dx$$

Откуда: $F = \frac{B^2}{2\mu_0}\ \frac{\pi d^2}{4} = \frac{(\mu_0 M)^2}{\mu_0}\ \frac{\pi d^2}{8} = \mu_0 M^2\ \frac{\pi d^2}{8}$