Интегральное исчисление
Лекции для ИУ9

Далее ссылки на учебники:

[**З**]: Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. — М.: Наука, 1981. — 544с.

[**ЗИК**]: Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 528 с. (Сер. Математика в техническом университете, вып. VI).

[**АСЧ**]: Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу / Под ред. В.А. Садовничего — М.: Высш. шк., 1999. — 695с.

[**Р**]: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1978. — 320 с.

1 Понятие неопределенного интеграла

См. [ЗИК: §1.1–1.6].

1.1 Первообразная

Рассмотрим обратную задачу к задаче дифференцирования — восстановление функции $F(x)$ по известной зависимости ее производной $F'(x) = f(x)$ от аргумента x.

Промежутком будем называть какой–либо конечный или бесконечный интервал, полуинтервал или отрезок.

Функцию $F(x)$ называют **первообра́зной** функции $f(x)$ в заданном промежутке, если $F(x)$ дифференцируема и $F'(x) = f(x)$ в этом промежутке.

Теорема 1. Дифференцируемые в промежутке X функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ будут в этом промежутке первообразными одной и той же функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда разность их значений для любого $x \in X$ постоянна.

Док–во. Достаточность очевидна, так как постоянная функция имеет нулевую производную:

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x) = F'(x) + C' = F'(x) \quad \forall x \in X.$$

Для доказательства необходимости выберем в промежутке X произвольные точки x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$. Из связности промежутка следует, что $[x_1, x_2] \subseteq X$.

Так как функции $F(x)$ и $\Phi(x)$ дифференцируемы в промежутке X, то их разность $G(x) = F(x) - \Phi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[x_1, x_2]$. Поэтому

$$G(x_2) - G(x_1) = G'(c)(x_2 - x_1), \qquad c \in (x_1, x_2).$$

Но $G'(c) = F'(c) - \Phi'(c) = f(c) - f(c) = 0 \ \forall c \in (x_1, x_2)$, и поэтому $G(x_1) = G(x_2)$, т.е. функция $G(x)$ постоянна в промежутке X. $\triangleright$

Множество всех первообразных функции $f(x)$ в некотором промежутке называют **неопределенным интегралом** от этой функции в данном промежутке и обозначают $\int f(x)\,dx$. При этом символ $\int$ именуют **знаком интеграла**, $f(x)$ — **подынтегральной функцией**, $f(x)dx$ — **подынтегральным выражением**, а x — **переменной интегрирования**. Если $F(x)$ — какая-либо первообразная функции $f(x)$ в рассматриваемом промежутке, то правомерна запись

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Нахождение неопределенного интеграла от заданной функции называют ее **интегрированием**.

Теорема 2. Всякая непрерывная в промежутке X функция имеет первообразную в этом промежутке.

Доказательство будет дано позже (см. следствие в §8).

Примеры 1–4) $e^x, 1/x, \cos x, 1/\cos^2 x$.

1.2 Простейшие свойства неопределенного интеграла

$$1)\ \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad 2)\ d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx,$$
$$3)\int F'(x)\,dx = F(x) + C, \qquad 4)\int dF(x) = F(x) + C,$$
$$5)\int \Big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\Big)\,dx = \lambda_1 \int f_1(x)\,dx + \lambda_2 \int f_2(x)\,dx.$$

Док–во следует из определений и свойств производных и дифференциалов.

Примеры 5–7) $x^s, \sin x, 1/\sin^2 x$.

1.3 Общие методы интегрирования

3.1.Интегрирование подведением под знак дифференциала:

$$\int g(x)\,dx = \int f\Big(u(x)\Big)u'(x)\,dx = \int f\Big(u(x)\Big)\,du(x) = F\Big(u(x)\Big) + C,$$

где $F(u)$ — первообразная функции $f(u)$.

Док–во: дифференцирование сложной функции.

Пример 8. $\int 1/(ax+b)^k\,dx$, под знак дифференциала $ax+b$.

3.2. Интегрирование заменой переменной (подстановкой):

$$\int f(x)\,dx = \int f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Док–во: дифференцирование сложной и обратной функций (по x).

Оформление: используемую замену приводят в комментариях между двумя вертикальными чертами.

Пример 9.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \left|\begin{array}{l} x = a\sin z \\ z = \arcsin\frac{x}{a}\end{array}\right| = \int \frac{1}{a\cos z}\,a\cos z\,dz = z = \arcsin\frac{x}{a}.$$

3.3. Интегрирование по частям:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Док–во: дифференцирование произведения.

Формула для более легкого запоминания: $\int udv = uv - \int vdv$.

Пример 10. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.

2 Рациональные функции

См. [ЗИК: §2.1, 2.3].

Рациональными называют функции вида

$$f(x) = \tfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad \begin{aligned} P_m(x) &= b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m, \\ Q_n(x) &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

Простейшие рациональные дроби:

$$1)\ \frac{A}{x-a}, \quad 2)\ \frac{B}{(x-a)^k}, \quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad k>1.$$

Схема интегрирования рациональных функций: сначала функцию представляют в виде суммы простейших дробей, а затем интегрируют каждое слагаемое полученного разложения.

2.1 Правильные рациональные дроби и многочлены

Если $n > m \geqslant 0$, то рациональную дробь называют **правильной**, в противном случае — **неправильной**. Используя правило деления многочленов, неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена P_{m-n} степени $m-n$ и некоторой правильной дроби, т.е.

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = P_{m-n}(x) + \frac{P_l(x)}{Q_n(x)},$$

где многочлен $P_l(x)$ имеет степень $l < n$.

Напомним:

Теорема Безу. Если a — корень многочлена $P(x)$, то многочлена $P(x)$ делится на $x - a$ без остатка.

Натуральное число k называют **кратностью** корня a многочлена $P(x)$, если существует такой многочлен $Q(x)$, что

$$P(x) = (x-a)^k Q(x), \qquad Q(a) \neq 0.$$

Теорема Безу верна и в случае действительного, и в случае комплексного корня. Пусть многочлен $Q_n(x)$ степени n с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z = \alpha + \beta i$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, i — **мнимая единица**, $i^2 = -1$) кратности $k \in \mathbb{N}$. Но тогда сопряженное с этим корнем комплексное число $\overline{z} = \alpha - \beta i$ является для данного многочлена корнем той же кратности, т.е. многочлен $Q_n(x)$ делится на многочлен

$$\big((x-z)(x-\overline{z})\big)^k = (x^2 + px + q)^k,$$

где $p = -2\alpha$ и $q = \alpha^2 + \beta^2$ — действительные числа.

Основная теорема алгебры. Любой многочлен $Q_n(x)$ степени n с действительными коэффициентами представляется в виде

$$Q_n(x) = a_0(x-c_1)^{k_1} \dots (x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \dots (x^2+p_tx+q_t)^{s_t}, \qquad (1)$$

где $c_1, \dots, c_r$ — действительные корни многочлена $Q_n(x)$, квадратные трехчлены $x^2 + p_ix + q_i$ не имеют действительных корней, $k_1 + \dots + k_r + 2(s_1 + \dots + s_t) = n$.

2.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие

Теорема 2. Всякая правильная рациональная дробь представляется в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{1,k_1}}{x-c_1} + \dots + \Big[\text{аналог. для } c_2, \dots, c_r\Big] +$$
$$+ \frac{M_{1,1}x + N_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \frac{M_{1,s_1}x + N_{1,s_1}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \left[\frac{\text{аналогично для}}{(p_2,q_2), \dots, (p_t,q_t)}\right].$$

где в знаменателях стоят сомножетели разложения (1), $A_{i,j}, M_{i,j}, N_{i,j}$ — некоторые числа, зависящие от $P_m(x)$ и $Q_n(x)$.

Лемма 1. Если число $a \in \mathbb{R}$ является действительным корнем кратности k многочлена $Q_n(x)$, $Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x)$, то несократимую правильную рациональную дробь $P_m(x)/Q_n(x)$ можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-1}Q_{n-k}(x)},$$

где $A \neq 0$ и $P_l(x)$ — многочлен степени $l < n-1$, т.е. последнее слагаемое является правильной рациональной дробью.

Док–во. Добавим к дроби слагаемые $A/(x-a)^k$ $(A \in \mathbb{R})$ с разными знаками и преобразуем выражение:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)} + \frac{A}{(x-a)^k} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_m(x) - AQ_{n-k}(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)}.$$

Второе слагаемое является правильной рациональной дробью, т.к. $m < n$ и $n-k < n$. Так как a — корень кратности k, то $Q_{n-k}(a) \neq 0$. Так как $P_m(x)/Q_n(x)$ — несократимая дробь, то $P_m(a) \neq 0$. Положим $A = P_m(a)/Q_{n-k}(a) \neq 0$. Тогда $P_m(a) - AQ_{n-k}(a) = 0$, а значит, по теореме Безу многочлен $P_m(x) - AQ_{n-k}(x)$ делится на $x-a$. Сократим второе слагаемое на $x-a$:

$$\frac{P_m(x) - AQ_{n-k}(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)} = \frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{n-k}(x)}. \tag{2}$$

Так как эта дробь получена сокращением правильной рациональной дроби, она является правильной (но возможно сократимой). ▷

Лемма 2. Если комплексное число $z = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ является корнем кратности $s \in \mathbb{N}$ $(2 \leqslant 2s \leqslant n)$ многочлена $Q_n(x)$ с действительными коэффициентами, то несократимую правильную рациональную дробь $P_m(x)/Q_n(x)$ можно представить в виде

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P_l(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\, Q_{n-2s}(x)}, \tag{3}$$

где $x^2+px+q = (x-z)(x-\overline{z})$, $Q_{n-2s}(x)$ — такой многочлен степени $n-2s$, что

$$Q_n(x) = (x^2+px+q)^s Q_{n-2s}(x), \qquad Q_{n-2s}(z) \neq 0,$$

числа M, N одновременно не обращаются в нуль, а последнее слагаемое в (3) является правильной рациональной дробью: $l < n-2$.

Док–во. Добавим к дроби слагаемые $(Mx+N)/(x^2+px+q)^s$ $(M, N \in \mathbb{R})$ с разными знаками и преобразуем выражение:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s} + \frac{P_m(x) - (Mx+N)Q_{n-2s}(x)}{(x^2+px+q)^s Q_{n-2s}(x)}. \tag{4}$$

В знаменателе второго слагаемого в правой части (4) стоит многочлен степени n, а степень многочлена в числителе этого слагаемого меньше n, поскольку и $m < n$, и $n-2s+1 < n$. Следовательно, это слагаемое является правильной рациональной дробью.

Выберем действительные числа M и N так, чтобы многочлен $P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2s}(x)$ делился на x^2+px+q. Это эквивалентно тому, что

$$P_m(z) - \big(Mz+N\big)Q_{n-2s}(z) = 0, \qquad z = \alpha + \beta i. \tag{5}$$

Тогда и сопряженное z комплексное число $\overline{z} = \alpha - \beta i$ также будет корнем этого уравнения. Поэтому многочлен $P_m(x) - (Mx+N)Q_{n-2s}(x)$ делится на $x^2+px+q = (x-z)(x-\overline{z})$. Из (5) следует, что

$$M(\alpha+\beta i) + N = \frac{P_m(z)}{Q_{n-2s}(z)} = K + Li,$$

где K и L — некоторые действительные числа. Приравнивая в этом равенстве действительные и мнимые части, получаем $M\alpha + N = K$ и $M\beta = L$. Отсюда $M = L/\beta$ и $N = K - \alpha L/\beta$. Числа M и N одновременно не обращаются в нуль, так как в противном случае $P_m(z) = 0$ и дробь $P_m(x)/Q_n(x)$ сократима, а это противоречит условию леммы. При таком выборе M и N второе слагаемое в правой части (4) можно сократить на $x^2 + px + q$, записав его в виде

$$\frac{P_m(x) - (Mx{+}N)Q_{n-2s}(x)}{(x^2 + px + q)^s\, Q_{n-2s}(x)} = \frac{P_l(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1}\, Q_{n-2s}(x)}, \tag{6}$$

где $P_l(x) = \big(P_m(x){-}(Mx{+}N)Q_{n-2s}(x)\big)/(x^2{+}px{+}q)$. Рациональная дробь в правой части (6) получена сокращением правильной рациональной дроби с действительными коэффициентами на множитель $x^2 + px + q$, где p и q — действительные числа, и поэтому является правильной рациональной дробью с действительными коэффициентами. ▷

Док–во теоремы 2. К правильной рациональной дроби в правой части (2) при $k > 1$ можно вновь применить лемму 1 и в итоге получить

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{P_{l_1}(x)}{Q_{n-k}(x)}. \tag{7}$$

Здесь $P_{l_1}(x)/Q_{n-k}(x)$ — несократимая правильная рациональная дробь, так как в ином случае правая часть в (7) после ее приведения к общему знаменателю является сократимой дробью, а это противоречит условию леммы. Если многочлен $Q_{n-k}(x)$ имеет другие действительные корни, то к последней дроби в правой части (7) также применима лемма 1. И т.д.

Если многочлен $Q_n(x)$ не имеет действительных корней, а имеет комплексные корни, то применима лемма 2. Ко второму слагаемому в правой части (3) при $s > 1$ можно вновь применить лемму 2 и получить

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{s-1}} + \ldots + \frac{M_{s-1}x+N_{s-1}}{x^2+px+q} + \frac{P_s(x)}{Q_{n-2s}(x)},$$

где $P_s(x)/Q_{n-2s}(x)$ — несократимая правильная рациональная дробь. Многочлен $Q_{n-2s}(x)$ имеет другие комплексные корни, а значит, к этой дроби также применима лемма 2. И т.д. ▷

3 Интегрирование различных классов функций

См. [ЗИК: §2.2, 2.4, 3.1, 3.2, 3.5, 4.1, 4.2].

3.1 Метод интегрирования рациональных функций

Интегрирование простейших рациональных дробей.
Алгоритм интегрирования рациональных функций:

1. Выделить правильную дробь.
2. Найти вид разложения на простейшие дроби.

3. Найти коэффициенты разложения, используя методы неопределенных коэффициентов или подстановки.

4. Проинтегрировать каждое слагаемое полученного разложения.

Пример 1.

$$\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$$

3.2 Интегрирование тригонометрических выражений

Обозначим через $R(u(x), v(x), \ldots, w(x))$ функцию, которая получается из функций $u, v, \ldots, w$ и констант с помощью конечного числа арифметических действий.

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ сводится к интегралу от рациональной функции заменой переменного $\operatorname{tg}(x/2) = t$, называемой **универсальной подстановкой**. При этом:

$$x = 2\operatorname{arctg}\ t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

2. Применение универсальной подстановки к интегралу вида

$$\int \sin^m x\, \cos^q x\, dx, \quad m,\, q \in \mathbb{Q}, \tag{1}$$

может привести к громоздким вычислениям. В рассмотренных ниже четырех частных случаях к цели можно прийти более простым путем.

2.1. Если число m в (1) натуральное нечетное, то следует подвести $\sin x$ под знак дифференциала и использовать равенство $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

2.2. Если число q в (1) натуральное нечетное, то следует подвести $\cos x$ под знак дифференциала и использовать равенство $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

2.3. Если m и q в (1) — целые четные и неотрицательные числа (в частности, одно из них может быть равно нулю), то следует уменьшить сумму показателей вдвое переходом к удвоенному аргументу по формулам

$$\sin x\, \cos x = \frac{\sin 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

2.4. Если $m + q = -2n$ ($n \in \mathbb{N}$), то нужно числитель и знаменатель подынтегрального выражения разделить на $\cos^{2n} x$, подвести множитель $1/\cos^2 x$ под знак дифференциала, а остальную часть подынтегральной функции выразить через $\operatorname{tg} x$.

Примеры 2–4:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}\, dx, \qquad \int \sin^4 x\, \cos^2 x\, dx, \qquad \int \sqrt[3]{\frac{\cos x}{\sin^{13} x}}\, dx.$$

3. При вычислении интегралов от произведений синусов и косинусов различных аргументов необходимо использовать тригонометрические формулы понижения степени:

$$\sin \alpha x\, \cos \beta x = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x\Big);$$

$$\sin\alpha x\,\sin\beta x = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x\Big);$$

$$\cos\alpha x\,\cos\beta x = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x\Big),$$

сводя подынтегральную функцию к линейной комбинации синусов и косинусов.

3.3 Интегрирование иррациональных выражений

1. Для вычисления интегралов вида

$$\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{k_1}}, \ldots, \sqrt[m_l]{\left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{k_l}}\right)\,dx$$

следует использовать замену

$$\frac{ax+b}{cx+e} = t^m,$$

где $m \in \mathbb{N}$ является общим кратным чисел m_i $(i = 1, \ldots, l\,)$, т.е. $m/m_i \in \mathbb{Z}$.

2. Для интегрирования функций вида $R\big(x,\, \sqrt{ax^2+bx+c}\,\big)$ следует сначала выделить полный квадрат в трехчлене

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}}$$

и сделать линейную замену переменной $t = x + b/(2a)$. Тогда интеграл примет вид интеграла от функции одного из трех видов:

$$R_1\big(t,\, \sqrt{A^2-t^2}\big), \qquad R_2\big(t,\, \sqrt{t^2-A^2}\big), \qquad R_3\big(t,\, \sqrt{t^2+A^2}\big).$$

Для первой из них следует сделать замену $t = A\cos\varphi$, $\sqrt{A^2-t^2} = A\sin\varphi$, для второй — замену $t = A/\cos\varphi$, $\sqrt{t^2-A^2} = A\,\mathrm{tg}\,\varphi$, для третьей — замену $t = A\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\sqrt{t^2+A^2} = A/\cos\varphi$. Получится интеграл из пункта 3.2.1 или 3.2.2.

3.4 Неберущиеся интегралы. Практические советы для овладения техники интегрирования

Неберущимися называются неопределенные интегралы от элементарных функций, которые сами не являются элементарными.

Примеры неберущихся интегралов:

$$\int e^{-x^2}dx \quad \text{(интеграл вероятности)},$$

$$\int \cos x^2 dx, \quad \text{и} \quad \int \sin x^2 dx \quad \text{(интегралы Френеля)},$$

$$\int \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \text{и} \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad \text{(интегральные синус и косинус)},$$

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx, \quad \text{(интегральная показательная функция)},$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \quad \text{(интегральный логарифм)}.$$

Советы: 1) уметь пользоваться справочниками;
2) составить свой собственный справочник и занести в него:

а) табличные интегралы;

б) формулу интегрирования по частям;

в) таблицу дифференциалов, например, в виде:

$$
\begin{aligned}
&dx \rightsquigarrow d(ax+b), \quad \sin x dx \rightsquigarrow d\cos x, \quad \cos x dx \rightsquigarrow d\sin x,\\
&e^x dx \rightsquigarrow de^x, \quad x dx \rightsquigarrow dx^2, \quad x^2 dx \rightsquigarrow dx^3, \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} \rightsquigarrow d\sqrt{x},\\
&\frac{dx}{x} \rightsquigarrow d\ln x, \quad \frac{dx}{x^2} \rightsquigarrow d\frac{1}{x}, \quad \frac{dx}{\cos^2 x} \rightsquigarrow d\,\mathrm{tg}\, x, \quad \frac{dx}{\sin^2 x} \rightsquigarrow d\,\mathrm{ctg}\, x,\\
&\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \rightsquigarrow d\arcsin\frac{x}{a}, \quad \frac{dx}{x^2+a^2} \rightsquigarrow d\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a},
\end{aligned}
$$

где символ $\rightsquigarrow$ означает равенство с точностью до числового коэффициента, который легко найти, вычисляя дифференциал справа;

г) разложение рациональной дроби на простейшие дроби;

д) таблицы приемов интегрирования тригонометрических и иррациональных выражений;

е) формулы тригонометрии;

3) необходима практика.

4 Определенный интеграл

См. [3: гл. 6, §1].

4.1 Примеры задач, приводящих к понятию определенного интеграла

1) **Задача о нахождении пути**. Пусть точка движется вдоль числовой оси, $s(t)$ — ее координата, а $v(t)$ — ее скорость в момент времени t. Предположим, что мы знаем положение $s(t_0)$ точки в начальный момент t_0 и к нам поступают данные о ее скорости. Располагая ими, мы хотим вычислить положение $s(T)$ в конечный момент времени $T > t_0$.

Предположим $v(t)$ — непрерывная функция, а промежуток $[t_0, T]$ мал. Тогда можно считать, что эта функция мало меняется на этом промежутке и можно считать ее постоянной на нем. Поэтому мы имеем приближенное равенство

$$s(T) - s(t_0) \approx v(\xi)(T - t_0),$$

где ξ — некоторый (произвольный) момент времени из $[t_0, T]$.

В случае произвольного промежутка $[t_0, T]$ разобьем его точками $t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ на отрезки $[t_{i-1},\ t_i]$, $i = 1, \dots, n$. На каждом отрезке $[t_{i-1},\ t_i]$ выберем точку ξ_i, $i = 1, \dots, n$. Имеем $s(t_i) - s(t_{i-1}) \approx v(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ при $i = 1, \dots, n$, если $\lambda = \max_{i=1,\dots,n}(t_i - t_{i-1})$ малая величина. Поэтому

$$s(T) - s(t_0) \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \quad \text{и} \quad s(T) - s(t_0) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)(t_i - t_{i-1}).$$

2) **Задача о вычислении площади криволинейной трапеции**.
Пусть f — непрерывная неотрицательная функция на отрезке $[a,\ b]$. Фигуру $abBA$ (рис. 1), имеющую основанием отрезок $[a,\ b]$ и ограниченную графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.

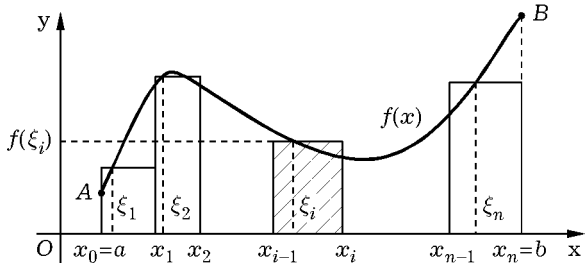

Рис. 1

Вычислим площадь S криволинейной трапеции. Для этого рассмотрим разбиение $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и выберем на каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ какую–либо точку ξ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Обозначим через S_i площадь криволинейной трапеции, отвечающей изменению x на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Если длина этого отрезка мала, то S_i мало отличается от площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ высоты $f(\xi_i)$. Поэтому

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad \text{и} \quad S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, а $\lambda = \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$.

4.2 Определение

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Конечное множество точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ называют **разбиением отрезка** $[a, b]$ и обозначают $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ отрезок $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$ назовем **частичным отрезком разбиения** P и обозначим через Δ_i. Его длину обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \dots, n\,)$. Число $\lambda = \max_{i=1,\dots,n} \Delta x_i$ называют **параметром разбиения** (или **диаметром разбиения**) P. Заметим, что $\lambda \geqslant (b-a)/n$.

Пусть на каждом частичном отрезке произвольным образом выбрана точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Пару (P, ξ), где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, называют **разбиением с отмеченными точками**.

Сумму

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называют **интегральной суммой** для функции $f(x)$, соответствующей разбиению $P = (x_0, \dots, x_n)$ с отмеченными точками $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ отрезка $[a,\ b]$.

В множестве $\mathcal{P}$ разбиений с отмеченными точками данного отрезка $[a, b]$ рассмотрим следующую базу $\{b_d\}, d > 0$:

$$b_d = \{(P, \xi) \in \mathcal{P} : \lambda < d\}.$$

Проверим, что $\{b_d\}, d > 0$ — действительно база в $\mathcal{P}$.

1) Для любого $d > 0$ элемент b_d непуст, так как существует разбиение отрезка $[a, b]$ на $n = [(b-a)/d] + 1$ отрезков одинаковой длины $(b-a)/n < d$. В качестве отмеченных точек ξ_i всегда можно взять середины отрезков. Поэтому $b_d \neq \varnothing$.

2) Если $d_1 > 0, d_2 > 0$ и $d = \min(d_1, d_2)$, то $b_{d/2} \subset b_d = b_{d_1} \cap b_{d_2}$ и $b_{d/2} \neq b_d$.

Будем обозначать эту базу через $\lambda \to 0$.

Предел по базе $\lambda \to 0$ значений интегральных сумм для функции f, отвечающих разбиению с отмеченными точками отрезка $[a,\ b]$, называют **интегралом Римана** (**определенным интегралом**) от функции f на отрезке $[a,\ b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При этом если предел существет и конечен, **функцию** $f(x)$ называют **интегрируемой по Риману** на отрезке $[a, b]$, числа a и b — **нижним** и **верхним пределами интегрирования**.

Т.е. число I есть интеграл Римана от функции f на отрезке $[a,\ b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для любого разбиения (P, ξ) с отмеченными точками отрезка $[a,\ b]$, параметр которого $\lambda < \delta$, имеет место соотношение

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Множество всех функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $\mathcal{R}[a, b]$. Поскольку пока мы не будем рассматривать другие типы интегралов, кроме интеграла Римана, условимся для краткости вместо термина "интеграл Римана" и "функция, интегрируемая по Риману", говорить соответственно "интеграл" и "интегрируемая функция".

Замечание. 1. Интеграл от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ является числом, которое не зависит от обозначения **переменной интегрирования**.
2. Для неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ геометрически каждое слагаемое интегральной суммы $\sigma(f; P, \xi)$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, а вся сумма равна площади ступенчатой фигуры, объединяющей такие прямоугольники на всем отрезке (рис. 1). Поэтому геометрически определенный интеграл интерпретируется как площадь криволинейной трапеции $abBA$.

Теорема 1 (интеграл от константы).

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)\,.$$

Док–во. Интегральная сумма для константы не зависит от выбора разбиения P и отмеченных точек ξ и равна

$$\sigma(f; P, \xi) = \sum_{i=1}^n c\Delta x_i = c(b-a)\,.$$

Из теоремы о пределе постоянной функции получаем указанную формулу.

5 Множество интегрируемых функций

См. [3: гл. 6, §1].

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости).
$f \in \mathcal{R}[a,b] \quad \Longrightarrow \quad f$ ограничена на отрезке $[a,b]$.

Док–во. Предположим противное: функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и не ограничена на этом отрезке. Согласно определению интегрируемости, существует конечный предел интегральных сумм для этой функции на данном отрезке. Из теоремы о локальной ограниченности функции, имеющей предел, существует элемент базы b_d, на котором интегральная сумма ограничена, т.е.

$$\exists c > 0 \quad \Big(\lambda(P) < d \quad \Longrightarrow \quad \big|\sigma(f;P,\xi)\big| < c\Big). \tag{1}$$

Выберем одно из таких разбиений (P,ξ) с отмеченными точками. Поскольку функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$, то найдется частичный отрезок Δ_j, на котором функция $f(x)$ является неограниченной. Разобьем интегральную сумму на два слагаемых и используем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \big|\sigma(f;P,\xi)\big| &= \left|f(\xi_j)\Delta x_j + \sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \geqslant \\ &\geqslant \big|f(\xi_j)\Delta x_j\big| - \left|\sum_{i\neq j} f(\xi_i)\Delta x_i\right| = \big|f(\xi_j)\big|\,\Delta x_j - c_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где c_1 — значение второго слагаемого. Меняя только точку $\xi_j \in \Delta_j$, но не меняя остальные элементы разбиения (P,ξ), слагаемое $f(\xi_j)\Delta x_j$ в интегральной сумме можно сделать сколь угодно большим по абсолютной величине, но это противоречит неравенствам (1) и (2). Возникшее противоречие опровергает принятое предположение и доказывает утверждение теоремы. ▷

Колебанием функции f на множестве E называют число

$$\omega(f;E) = \sup_{x',x''\in E} |f(x') - f(x'')|.$$

Теорема 2 (критерий интегрируемости). В введенных обозначениях

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i = 0.$$

Докажем сначала два вспомогательных утверждения. Пусть разбиение $\tilde{P}$ отрезка $[a,b]$ получено из разбиения P только добавлением некоторых новых точек. Будем называть разбиение $\tilde{P}$ **продолжением** разбиения P.

Лемма 1. Пусть $\tilde{P}$ — продолжение разбиения P, $\xi, \tilde{\xi}$ — отмеченные точки разбиений $P, \tilde{P}$ соответственно. Тогда

$$\big|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P,\xi)\big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i. \tag{3}$$

Для **док–ва леммы 1** введем следующие обозначения. При построения продолжения $\tilde{P}$ некоторые (может и все) частичные отрезки $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ разбиения P сами подвергаются разбиению $x_{i-1} = x_{i0} < x_{i1} < \ldots < x_{ik_i} = x_i$. Поэтому будем нумеровать точки разбиения $\tilde{P}$ двумя индексами. В записи x_{ij} первый индекс означает, что $x_{ij} \in \Delta_i$, а второй индекс есть порядковый номер точки на отрезке Δ_i. Положим также $\Delta x_{ij} = x_{ij} - x_{ij-1}$ и $\Delta_{ij} = [x_{ij-1}, x_{ij}]$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\tilde{\xi} = (\xi_{11}, \ldots, \xi_{nk_n})$ — отмеченные точки разбиений P и $\tilde{P}$ соответственно. Нумерация точек $\tilde{\xi}$ выбрана так, что $\xi_{ij} \in \Delta_{ij}$. Используя определения, неравенство треугольника и равенства $\Delta x_i = \Delta x_{i1} + \ldots + \Delta x_{ik_i}$ при $i = 1, \ldots, n$, получаем

$$\left|\sigma(f; \tilde{P}, \tilde{\xi}) - \sigma(f; P, \xi)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_i)\Delta x_{ij}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\big(f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)\big)\Delta x_{ij}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\left|f(\xi_{ij}) - f(\xi_i)\right|\Delta x_{ij} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i}\omega(f; \Delta_i)\Delta x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\omega(f; \Delta_i)\Delta x_i. \qquad \triangleright$$

Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, а P — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда из необходимого условия интегрируемости следует ограниченность функции f на отрезке $[a, b]$, и поэтому определены значения:

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i, \quad s(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i.$$

Суммы $S(f; P)$ и $s(f; P)$ называют **верхней** и **нижней суммами Дарбу** для функции $f(x)$, соответствующими фиксированному разбиению P. Из определений имеем

$$s(f; P) \leqslant S(f; P). \tag{4}$$

Лемма 2. Пусть $f \in \mathcal{R}[a, b]$, а P — какое–либо разбиение отрезка $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой набор ξ отмеченных точек, что

$$S(f; P) < \sigma(f; P, \xi) + \varepsilon. \tag{5}$$

Док–во леммы 2. По определению чисел M_i для каждого i найдется точка $\xi_i \in \Delta_i$, в которой $M_i < f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$. Тогда для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеем

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n}\left(f(\xi_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \varepsilon = \sigma(f; P, \xi) + \varepsilon. \qquad \triangleright$$

Аналогично доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой набор ξ' отмеченных точек, что

$$\sigma(f; P, \xi') - \varepsilon < s(f; P). \tag{6}$$

Док–во теоремы 2 основано на критерии Коши существования предела по базе. $\Leftarrow$: Пусть

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i = 0.$$

По определению предела по базе для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения (P,ξ) с отмеченными точками отрезка $[a,\,b]$, параметр которого $\lambda < \delta$, имеет место соотношение

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Если теперь (P',ξ') и (P'',ξ'') — разбиения с отмеченными точками отрезка $[a,\,b]$, параметры которых удовлетворяет условиям $\lambda' < \delta$, $\lambda'' < \delta$, то рассмотрим разбиение $\tilde{P} = P' \cup P''$, являющееся продолжением обоих разбиений P', P''. Из неравенств (3) и (7) следует, что

$$\left|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P',\xi')\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \left|\sigma(f;\tilde{P},\tilde{\xi}) - \sigma(f;P'',\xi'')\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А значит, из неравенства треугольников получаем

$$\left|\sigma(f;P',\xi') - \sigma(f;P'',\xi'')\right| < \varepsilon.$$

В силу критерия Коши существует предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\ \sigma(f;P,\xi)$, т.е. $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

$\Rightarrow$: Если $f \in \mathcal{R}[a,b]$, то существует предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\ \sigma(f;P,\xi)$. В силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для разбиений (P,ξ') и (P,ξ'') с отмеченными точками отрезка $[a,\,b]$, параметр которых $\lambda < \delta$, имеет место соотношение

$$\left|\sigma(f;P,\xi) - \sigma(f;P,\xi')\right| < \varepsilon. \tag{8}$$

Из соотношений (4)–(6), (8) следует, что

$$|S(f;P) - s(f;P)| \leqslant |\sigma(f;P,\xi) - \sigma(f;P,\xi') + 2\varepsilon| < 3\varepsilon,$$

а значит

$$\lim_{\lambda\to 0}\big(S(f;P) - s(f;P)\big) = 0.$$

Но $\omega(f;\Delta_i) = M_i - m_i$, поэтому

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\big(S(f;P) - s(f;P)\big) = 0.$$

$\triangleright$

Пример. Функция Дирихле

$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{при } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

рассматриваемая на отрезке $[0,1]$, не интегрируема на нем. Действительно, для любого разбиения P отрезка $[0,1]$ в каждом частичном отрезке Δ_i разбиения P есть и рациональные точки, и иррациональные точки, поэтому $\omega(\mathcal{D};\Delta_i)=1$, а значит, $\sum_{i=1}^n \omega(\mathcal{D};\Delta_i)\Delta x_i = 1$ и условие критерия интегрируемости не выполняется.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Док–во. По теореме Кантора, поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, она равномерно непрерывна на нем. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что отрезок $[a,b]$ можно разбить на частичные отрезки длиной меньше δ, на каждом из которых колебание функции $f(x)$ будет меньше $\varepsilon/(b-a)$, т.е. при диаметре $\lambda(P)<\delta$ разбиения P будет выполнено неравенство $0\leqslant\omega(f;\Delta_i)<\varepsilon/(b-a)$. Умножая это неравенство на длину $\Delta x_i>0$ частичного отрезка и суммируя по i, получаем

$$0\leqslant\sum_{i=1}^n \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_i=\varepsilon,$$

что в силу критерия интегрируемости доказывает утверждение теоремы.

Следствие 2. Ограниченная с конечным числом точек разрыва на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

Док–во. Пусть функция f ограничена и имеет k точек разрыва на отрезке $[a,b]$. Проверим выполнимость условия критерия интегрируемости.

Так как функция f ограничена, то определено и конечно колебание $\omega(f;[a,b])$ этой функции на отрезке $[a,b]$. Обозначим его через ω. При заданном $\varepsilon>0$ построим δ_1–окрестности каждой из k точек разрыва функции f на $[a,b]$ (значение δ_1 выберем позже). Дополнительное к объединению этих окрестностей множество точек отрезка $[a,b]$ состоит из конечного числа отрезков, на каждом из которых f непрерывна и, значит, равномерно непрерывна. Поскольку таких отрезков конечное число, по $\varepsilon>0$ можно указать $\delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0$ так, что на любом отрезке Δ, длина которого меньше δ_2 и который полностью содержится в одном из указанных выше отрезков непрерывности f, будем иметь $\omega(f;\Delta)<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Возьмем теперь число $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Пусть P — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, для которого $\lambda(P)<\delta$. Сумму из критерия интегрируемости, отвечающую разбиению P, разобьем на две части:

$$\sum_{i=1}^n \omega(f;\Delta_i)\Delta x_i=\sum_{i'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i+\sum_{i\neq i'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i.$$

В сумму $\sum_{i'}$ включим те слагаемые, которые отвечают отрезкам Δ_i разбиения P, не имеющим общих точек с построенными δ_1–окрестностями точек разрыва. Для таких отрезков Δ_i имеем $\omega(f;\Delta_i)<\dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$, поэтому

$$\sum_{i'}\omega(f;\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i'}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Сумма длин оставшихся отрезков разбиения P меньше

$$(\delta+2\delta_1+\delta)k\leqslant 4\,\delta_1\,k=\frac{\varepsilon}{2\omega},$$

если положить $\delta_1 = \frac{\varepsilon}{8\omega k}$. Поэтому

$$\sum_{i \neq i'} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \omega \sum_{i \neq i'} \Delta x_i < \omega \, \frac{\varepsilon}{2\omega} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, мы получаем, что при $\lambda(P) < \delta$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i < \varepsilon,$$

т.е. выполнено условие критерия интегрируемости и поэтому $f \in \mathcal{R}[a, b]$. $\triangleright$

6 Свойства интеграла: линейность и аддитивность

См. [3: гл. 6, §2].

6.1 Аддитивность

Теорема 1. Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом меньшем отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

Док–во. Пусть P — разбиение отрезка $[c, d]$. Добавив к P некоторые точки, достроим P до разбиения P' отрезка $[a, b]$, но так, чтобы диаметр λ' разбиения P' был не больше диаметра λ разбиения P. Тогда

$$0 \leqslant \sum_{P} \omega(f\big|_{[c,d]}; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{P'} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

где $\sum_P$ — сумма по всем отрезкам разбиения P, а $\sum_{P'}$ — сумма по всем отрезкам разбиения P'.

Так как $\lambda \geqslant \lambda' > 0$, то $\lambda' \to 0$ при $\lambda \to 0$. Переходя в неравенстве (1) к пределу по базе $\lambda \to 0$ и используя теорему о пределе промежуточной функции и критерий интегрируемости, получаем: $f \in \mathcal{R}[a, b] \;\Rightarrow\; f \in \mathcal{R}[c, d]$. $\triangleright$

Определенный интеграл Римана обобщается на случай $a \geqslant b$, при этом перестановка пределов интегрирования в определенном интеграле изменяет его знак, а интегралу с $a = b$ приписывают нулевое значение:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{при } a > b, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Данное определение не противоречит предыдущему, так как случаи $a > b, b > a$ и $a = b$ не пересекаются. Формулы (2) мотивируются тем, что при $a < b$ точки $x_0, \ldots, x_n$ разбиения удовлетворяют неравенствам $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и поэтому $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$. Поменяв местами a и b, но не меняя вид интегральных сумм, получаем $a = x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > x_n = b$ и $\Delta x_i < 0$, а значит интегральные суммы и определенный интеграл меняют знак. Случай

$a = b$ получается из случаев $a > b$ и $b > a$ предельным переходом $b \to a$, тогда из первого равенства в (2) получаем второе.

Для удобства в случае $a \geqslant b$ отрезок $[b, a]$ будем обозначать также через $[a, b]$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a,\, b]$, $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$, то она интегрируема на двух других отрезках и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b и c.

Док–во. Предположим сначала, что $a < c < b$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. На основании теоремы 1 заключаем, что $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,\, c]$ и $[c,\, b]$. Поэтому в дальнейших рассуждениях можно использовать некоторый специальный вид разбиений этих отрезков.

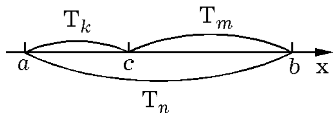

Рис. 2

Рассмотрим разбиение T_n отрезка $[a,\, b]$ на n частичных отрезков, причем точку c будем считать одной из точек деления этого отрезка (рис. 2). Пусть при этом T_k и T_m — разбиения отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ на k и m частичных отрезков соответственно $(k + m = n)$. Тогда интегральную сумму функции $f(x)$ для разбиения $T_n = T_k \cup T_m$ отрезка $[a,\, b]$ можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i')\Delta x_i' + \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i'')\Delta x_i'', \tag{4}$$

где первое слагаемое справа соответствует разбиению T_k отрезка $[a,\, c]$, а второе — разбиению T_m отрезка $[c,\, b]$. Параметры $\lambda_n, \lambda_k, \lambda_m$ разбиений T_n, T_k, T_m связаны неравенствами $\lambda_k \leqslant \lambda_n, \lambda_m \leqslant \lambda_n$. Поэтому при $\lambda_n \to 0$ имеем также $\lambda_k \to 0$ и $\lambda_m \to 0$. А значит, переходя в (4) к пределу по базе $\lambda_n \to 0$, получаем равенство (3).

Пусть теперь $a < b < c$. Тогда на основании доказанного имеем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Разрешая это равенство относительно интеграла по отрезку $[a,\, b]$ и используя (2), получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Аналогично это свойство можно доказать для любого другого взаимного расположения точек a, b и c. $\quad\triangleright$

6.2 Линейность

Теорема 3. Пусть функции f_1 и f_2 интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда при $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ функция $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ также интегрируема на отрезке $[a,b]$ и

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)\, dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)\, dx. \tag{5}$$

Док–во. Пусть $a < b$. Для некоторого разбиения $P = (x_0, \dots, x_n)$ с отмеченными точками $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ отрезка $[a,\, b]$ имеем равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_1 f_1(\xi_i) + \alpha_2 f_2(\xi_i)\big)\Delta x_i = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i. \tag{6}$$

В силу интегрируемости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на отрезке $[a,\, b]$ стоящие в правой части этого равенства интегральные суммы имеют пределы по базе $\lambda \to 0$. Но тогда существует конечный предел по этой базе и для интегральной суммы в левой части этого равенства, что в силу определения доказывает интегрируемость функции $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ на отрезке $[a,\, b]$. Переходя в обеих частях равенства (6) к пределу, получаем равенство из утверждения теоремы.

При $a = b$ все три интеграла в (5) равны нулю. А при $a > b$, меняя местами a и b, меняем знаки всех трех интегралов, а значит, этот случай сводится к случаю $a < b$. $\triangleright$

Отметим в заключении, что если две функции различаются на отрезке лишь в конечном числе точек, то интегрируемость одной из этих функций равносильна интегрируемости другой, причем их интегралы совпадают. Для доказательства этого факта достаточно использовать свойство линейности и определение интеграла.

7 Монотонность интеграла

См. [3: гл. 6, §2].

7.1 Теорема об оценке

Теорема 1. a) Если $a < b$, функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

b) Если, кроме того, существует точка $x' \in [a,b]$, в которой $f(x)$ непрерывна и $f(x') > 0$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0.$$

Док–во. Так как $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in [a,\, b]$ и $a < b$, то для любого разбиения P с отмеченными точками ξ отрезка $[a,\, b]$ имеем $\Delta x_i > 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по базе $\lambda \to 0$, получаем утверждение а).

Согласно свойствам функции, непрерывной в точке, и условию теоремы, существует окрестность точки x' (или полуокрестность этой точки, если x' совпадает с одним из концов отрезка), в которой $f(x) \geqslant \frac{1}{2} f(x') = A > 0$. Выделим в этой окрестности (или полуокрестности) отрезок $[\alpha, \beta]$. Тогда в силу аддитивности определенного интеграла, утверждения а) и свойства линейности имеем

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \ &= \ \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \ \geqslant \\ &\geqslant \ \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \big(f(x) - A\big)\,dx + \int_\alpha^\beta A\,dx \geqslant A(\beta - \alpha) > 0. \qquad \triangleright\end{aligned}$$

Теорема 2 **(монотонность интеграла)**. Если $a < b$, функции f_1 и f_2 интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f_1(x) \geqslant f_2(x) \ \forall x \in [a,b]$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \geqslant \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Док–во. В силу свойства линейности определенного интеграла функция $f_1(x) - f_2(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и, применяя теорему 1, получаем

$$\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\,dx \geqslant 0,$$

так как по условию $f_1(x) - f_2(x) \geqslant 0 \ \forall x \in [a,b]$. $\triangleright$

Теорема об оценке. Если $a < b$, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M \ \forall x \in (a,b)$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Для **док–ва** достаточно применить теорему 2 к неравенству $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на отрезке $[a,\, b]$. $\triangleright$

Задача. Дайте **геометрическую интерпретацию** данной теоремы.

7.2 Оценка модуля интеграла

Теорема 3 **(об оценке модуля интеграла)**. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то ее модуль $|f(x)|$ есть также интегрируемая функция на отрезке $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|. \tag{1}$$

Док–во. Учитывая неравенство $\big||f(\xi)| - |f(\eta)|\big| \leqslant \big|f(\xi) - f(\eta)\big|$, верное для любых точек $\xi,\ \eta \in [a,\ b]$, заключаем, что $\omega(|f|; E) \leqslant \omega(f; E)$. Поэтому для произвольного разбиение отрезка $[a, b]$ имеем

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(|f|; \Delta_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega(f; \Delta_i)\Delta x_i.$$

Согласно критерию интегрируемости, предел по базе $\lambda \to 0$ правой части этого неравенства равен нулю. Следовательно, предел по этой базе центральной части также равен нулю, что по тому же критерию означает интегрируемость функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть $a < b$. Так как $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ при $x \in [a,\ b]$, то по теореме 2:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

а это равносильно неравенству (1).

При $a = b$ оба интеграла в (1) равны нулю. А при $a > b$, меняя местами a и b, меняем знаки обоих интегралов, а значит, этот случай сводится к случаю $a < b$. $\triangleright$

7.3 Две теоремы о среднем

Теорема о среднем значении. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка c, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a). \tag{2}$$

Док–во. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то она интегрируема на нем. Кроме того, согласно теореме Вейерштрасса, непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке своих наименьшего m и наибольшего M значений. Поскольку $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in [a,\ b]$, то на основании теоремы об оценке можно записать

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leqslant M.$$

Обозначим среднюю часть этого неравенства через μ. Тогда $\mu \in [m,\ M]$, причем функция $f(x)$ принимает значения m и M. Согласно теореме Больцано — Коши о промежуточном значении непрерывной функции, найдется хотя бы одна точка $c \in [a,\ b]$, в которой $f(c) = \mu$. Учитывая определение числа μ, получаем утверждение теоремы. $\triangleright$

Средним значением функции на отрезке $[a, b]$ называют число

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\, dx.$$

Геометрическая интерпретация теоремы о среднем. При $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,\ b]$ определенный интеграл в левой части (2) представляет площадь криволинейной трапеции $abBA$ (рис. 3), имеющей основанием отрезок $[a,\ b]$ и ограниченную графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = a,\ x = b$. Согласно (2), эта площадь

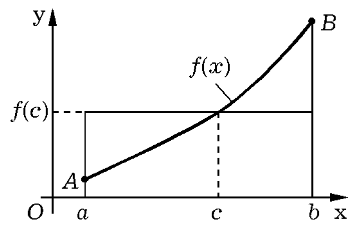

Рис. 3

равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, совпадающей со значением $f(c)$ функции $f(x)$ в точке $c \in [a,\, b]$.

Обобщенная теорема о среднем значении. Если на отрезке $[a,\, b]$ функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ интегрируема и знакопостоянна, то на этом отрезке найдется хотя бы одна точка c, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

Док–во. Пусть $a < b$ и $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a, b]$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, то, согласно теореме Вейерштрасса, она достигает на этом отрезке наименьшего m и наибольшего M значений и при этом $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)\ \forall x \in [a,\, b]$. В силу свойств монотонности и линейности интеграла имеем

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Согласно теореме 1, интеграл от неотрицательной функции неотрицателен, т.е.

$$I = \int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0.$$

Если $I = 0$, то интеграл в средней части (4) также равен нулю и (3) верно для любой точки $c \in [a,\, b]$. Если же $I > 0$, то, разделив (4) на I, получим

$$m \leqslant \frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M.$$

Обозначим среднюю часть этого неравенства через μ. Так как $\mu \in [m, M]$, то, согласно теореме Больцано — Коши, найдется хотя бы одна точка $c \in [a,\, b]$, в которой $f(c) = \mu$. Отсюда с учетом определения числа μ следует (3).

Аналогичное доказательство (3) в случае $g(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a, b]$.

При $a = b$ оба интеграла в (3) равны нулю. А при $a > b$, меняя местами a и b, меняем знаки обоих интегралов, а значит, этот случай сводится к случаю $a < b$. $\triangleright$

8 Вычисление определенного интеграла

См. [3: гл. 6, §3].

8.1 Интеграл с переменным пределом

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \tag{1}$$

определена и непрерывна на $[a, b]$.

Док–во. Так как функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[a,\, x] \subseteq [a,\, b]$, а значит, функция $F(x)$ определена для любого $x \in [a, b]$.

В силу необходимого условия интегрируемости функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,\, b]$, т.е. $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a,\, b]$ для некоторого $M > 0$. Придадим произвольному $x_0 \in [a,\, b]$ приращение Δx, не выводящее точку $x_0 + \Delta x$ за пределы отрезка $[a,\, b]$. Тогда в силу аддитивности определенного интеграла приращение функции $F(x)$, соответствующее приращению Δx, можно представить в виде

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Используя теорему об оценке модуля и монотонность интеграла, находим

$$0 \leqslant |\Delta F| = \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|\,dt\right| \leqslant M|\Delta x|.$$

Устремляя Δx к нулю, получаем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$, что и доказывает непрерывность функции $F(x)$ в точке x_0. При совпадении точки x_0 с одним из концов отрезка $[a,\, b]$ функция $F(x)$ будет непрерывна либо справа в точке a, либо слева в точке b. Так как x_0 является произвольной точкой отрезка $[a,\, b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке. $\triangleright$

Интеграл из теоремы 1 называют **определенным интегралом с переменным верхним пределом**.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то функция (1) дифференцируема в этой точке, причем $F'(x_0) = f(x_0)$.

Док–во. Из определения функции $F(x)$ и свойств интеграла следует, что

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_{x_0}^x f(t)\,dt - \int_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt. \end{aligned}$$

По теореме об оценке модуля интеграла

$$\left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x \big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt\right|.$$

Пусть ε — произвольное положительное число. Тогда в силу определения непрерывности функции в точке найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при условии

$|x - x_0| < \delta$ и $x \in [a, b]$ будет выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Учитывая монотонность интеграла, для указанных x имеем

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \big|f(t) - f(x_0)\big|\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon.$$

Поэтому $F'(x_0) = f(x_0)$. ▷

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке, то она на нем имеет первообразную, причем одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом.

Таким образом, интеграл Римана позволяет построить первообразную непрерывной функции.

8.2 Формула Ньютона — Лейбница

Теорема 3 (формула Ньютона — Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$ на этом отрезке.

Док–во. Из теоремы 2 следует, что функция (1) есть первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Две первообразные одной и той же функции на одном отрезке отличаются на константу (см. §1). Поэтому любую первообразную $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно представить в виде

$$\Phi(x) = C + \int_a^x f(t)\,dt.$$

Полагая здесь $x = a$ и $x = b$, получаем указанную формулу. ▷

Разность в правой части формулы Ньютона — Лейбница обозначают $\Phi(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона — Лейбница дает связь определенного и неопределенного интегралов, метод вычисления определенного интеграла, а также позволяет установить правило замены переменной под знаком определенного интеграла и правило интегрирования по частям.

8.3 Интегрирование по частям

Теорема 4. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

Док–во. Используя формулу производной произведения и формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b \big(u(x)v(x)\big)'\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b. \qquad \triangleright$$

8.4 Замена переменной (подстановка)

Теорема 5. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\, b]$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и $\varphi(t) \in [a,\, b]$ при $t \in [\alpha,\, \beta]$, то справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\, dt.$$

Док–во. Так как функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ непрерывны на отрезках $[a,\, b]$ и $[\alpha,\, \beta]$ соответственно и $\varphi(t) \in [a,\, b]$ при $t \in [\alpha,\, \beta]$, то сложная функция $f\bigl(\varphi(t)\bigr)$ непрерывна на $[\alpha,\, \beta]$. Ввиду непрерывности подынтегральных функций существуют оба определенных интеграла, а по теореме о производной интеграла с переменным верхним пределом функция $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ есть первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$\frac{d}{dt}F\bigl(\varphi(t)\bigr) = F'\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t) = f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)$$

и, используя дважды формулу Ньютона — Лейбница, получаем:

$$\int_\alpha^\beta f\bigl(\varphi(t)\bigr)\varphi'(t)\, dt = F\bigl(\varphi(\beta)\bigr) - F\bigl(\varphi(\alpha)\bigr) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \triangleright$$

Замечания. 1. Если функция $\varphi(t)$ монотонна на отрезке $[\alpha,\, \beta]$, условие $\varphi(t) \in [a,\, b]$ при $t \in [\alpha,\, \beta]$ следует из других условий теоремы 2 и не требует проверки.

2. При вычислении неопределенного интеграла заменой переменной x на t, получив первообразную, выраженную через переменную t, нужно было возвращаться к исходной переменной x. При вычислении же определенного интеграла в этом нет надобности. Однако не следует забывать делать пересчет пределов интегрирования при переходе к новой переменной.

Задача 1. Вычислите интеграл, используя указанную замену:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = |x = \sin t| = \dots .$$

Задача 2. Найдите ошибку:

$$\pi = \int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = |t = \operatorname{tg} x| = \int_0^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = 0.$$

Замечание. Для нахождения значений некоторых определенных интегралов нет необходимости вычислять их, достаточно использовать их геометрическую интерпретацию. Например интеграл из задачи 1 — это площадь четверти круга радиуса 1, и поэтому он равен $\pi/4$.

9 Геометрические приложения интеграла

См. [З: гл. 6, §4], [ЗИК: §9.1, 9.3, 9.4].

9.1 Площадь плоской фигуры

Теорема 1. Пусть плоская фигура ограничена отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, и графиками непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ $\forall x \in [a, b]$. Тогда площадь такой фигуры равна

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx.$$

Для **док–ва** используем сдвиг фигуры вверх (см. рис. 4). В силу непрерывности функции $f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, она ограничена на нем, и поэтому найдется такое число $M > 0$, что

$$g_1(x) = f_1(x) + M \geqslant 0 \quad \forall x \in [a,\, b].$$

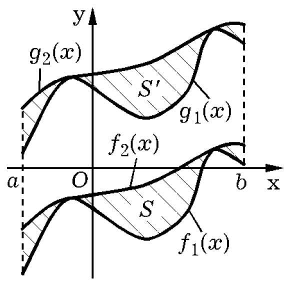

Рис. 4

Положим $g_2(x) = f_2(x) + M$. Тогда $g_2(x) \geqslant g_1(x)$ для любого $x \in [a, b]$. Заштрихованные на рис. 4 площади S и S' равны, так как одна получается из другой сдвигом, а при сдвиге площадь не меняется. Площадь S' равна разности $S_2 - S_1$ площадей криволинейных трапеций: S_2 ограничена графиком функции $g_2(x)$, S_1 — графиком функции $g_1(x)$. Используя геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции и линейность интеграла, получаем

$$S = S' = S_2 - S_1 = \int_a^b \big(g_2(x) - g_1(x)\big)\, dx = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx. \qquad \triangleright$$

Площадь плоской фигуры более сложной формы можно разрезать вертикальными прямыми на фигуры рассмотренного в теореме 1 вида и получить формулу для площади в виде суммы интегралов.

Задача 1. Фигуру, ограниченную гиперболой $x^2 - y^2 = 1$ и эллипсом $x^2 + 4y^2 = 4$, разрежьте вертикальными прямыми на фигуры указанного вида и запишите сумму интегралов для вычисления площади этой фигуры.

Следствие. Пусть плоская фигуры ограничена кривой, заданой параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha,\, \beta]$, и, может быть, вертикальными прямыми и осью Oх. Функция $y(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\, \beta]$, а $x(t)$ дифференцируема и имеет непрерывную на $[\alpha,\, \beta]$ производную. Кроме того, двигаясь по кривой в направлении роста t фигура остается справа. Тогда площадь этой фигуры равна

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Док–во. Разрежем рассматриваемую фигуру Φ вертикальными прямыми на фигуры Φ_i, $i = 1, \ldots, k$, рассмотренного в теореме 1 вида. Кривая, ограничивающая фигуру Φ, также разрежется на несколько (m) частей, которые заданы параметрически теми же уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, но с разной областью изменения параметра: $t \in [\alpha_j,\, \beta_j]$, $j = 1, \ldots, m$, при этом

$$\alpha = \alpha_1 < \beta_1 = \alpha_2 < \beta_2 = \alpha_3 < \ldots < \beta_m = \beta.$$

По теореме 1 площадь S_i части Φ_i равна интегралу от разности $f_{2i}(x) - f_{1i}(x)$ функций на некоторой части $[a_i,\, b_i]$ отрезка $[a,\, b]$, где $y = f_{2i}(x)$ — уравнение верхней границы фигуры Φ_i, а $y = f_{1i}(x)$ — уравнение нижней границы. По условии эти границы заданы параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t)$. Пусть $[\alpha_{j_i},\, \beta_{j_i}]$ — область изменения параметра на верхней границе, $[\alpha_{k_i},\, \beta_{k_i}]$ — область изменения параметра на нижней границе ($1 \leqslant j_i, k_i \leqslant m$). Тогда образ и отрезка $[\alpha_{j_i},\, \beta_{j_i}]$, и отрезка $[\alpha_{k_i},\, \beta_{k_i}]$ при отображении $t \to x(t)$ есть отрезок $[a_i,\, b_i]$. При этом, так как "двигаясь по кривой в направлении роста t фигура остается справа" (см. условие), то

$$x(\alpha_{j_i}) = a_i, \quad x(\beta_{j_i}) = b_i, \quad x(\alpha_{k_i}) = b_i, \quad x(\beta_{k_i}) = a_i. \tag{1}$$

Интеграл из теоремы 1 для площади S_i представим в виде разности двух интегралов и в каждом из них сделаем замену переменной $x = x(t)$, получим

$$S_i = \int_{a_i}^{b_i} f_{2i}(x)\, dx - \int_{a_i}^{b_i} f_{1i}(x)\, dx = \int_{\alpha_{j_i}}^{\beta_{j_i}} y(t)\, x'(t)\, dt - \int_{\beta_{k_i}}^{\alpha_{k_i}} y(t)\, x'(t)\, dt,$$

где учтено (1) и то, что $f_{2i}(x(t)) = y(t)$ при $t \in [\alpha_{j_i},\, \beta_{j_i}]$ и $f_{1i}(x(t)) = y(t)$ при $t \in [\alpha_{k_i},\, \beta_{k_i}]$. Меняя в последнем интеграле порядок интегрирования, получаем:

$$S_i = \int_{\alpha_{j_i}}^{\beta_{j_i}} y(t)\, x'(t)\, dt + \int_{\alpha_{k_i}}^{\beta_{k_i}} y(t)\, x'(t)\, dt.$$

Отметим, что возможна ситуация, когда нижняя или верхняя граница фигуры Φ_i есть отрезок оси Oх. Тогда в выражении для площади S_i присутствует только один из интегралов (второй равен нулю).

Площадь S всей фигуры Φ равна сумме площадей S_i, $i = 1, \ldots, k$. Так как для любого $j = 1, \ldots, m$ уравнения $x = x(t), y = y(t)$ при $t \in [\alpha_j,\, \beta_j]$ задают границу (нижнюю или верхнюю) в точности одного участка, то интеграл от функции $y(t)\, x'(t)$ на отрезке $[\alpha_j,\, \beta_j]$ встречается в сумме $\sum_{i=1}^{k} S_i$ в точности один раз. Используя свойство аддитивности, преобразуем эту сумму интегралов в один интеграл. Получим утверждение данного следствия. $\triangleright$

Задача 2. Используя доказанное следствие, найдите площадь внутри астроиды

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t; \qquad t \in [0,\, 2\pi],$$

9.2 Метод дифференциалов

Рассмотрим общую схему применения определенного интеграла.

Напомним: $[b,a]=[a,b]$.

Лемма. Пусть функции g и F определены в окрестности точки x, g непрерывна в x. Функция $G(\Delta x)$ определена в выколотой окрестности $\dot{U}(0)$ нуля и

$$\forall\ \Delta x\in\dot{U}(0)\qquad \inf_{t\in[x,x+\Delta x]} g(t)\leqslant\frac{\Delta F(x)}{G(\Delta x)}\leqslant\sup_{t\in[x,x+\Delta x]} g(t).$$

Если $G(\Delta x)=h\Delta x+o(\Delta x)$, $h\neq 0$, то $F'(x)=g(x)h$.

Док–во. Из непрерывности функции g в точке x следует, что

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0:\ |\Delta x|<\delta\quad\Rightarrow\quad\forall\ t\in[x,x+\Delta x]\quad |g(t)-g(x)|<\varepsilon.$$

А значит, для указанных Δx имеем

$$-\varepsilon\leqslant\inf_{t\in[x,x+\Delta x]} g(t)-g(x)\leqslant\frac{\Delta F(x)}{h\Delta x+o(\Delta x)}-g(x)\leqslant\sup_{t\in[x,x+\Delta x]} g(t)-g(x)\leqslant\varepsilon.$$

По определению предела

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{h\Delta x+o(\Delta x)}=g(x).$$

Поэтому

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x)}{h\Delta x+o(\Delta x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{h\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=g(x)h.\quad\triangleright$$

Интегральное исчисление применяется при решении различных задач математики, физики, техники и т.д. Один из характерных подходов такого применения называют **методом дифференциалов**. Он основан на выполнении следующих трех шагов:

1) решаемую задачу переформулируют в задачу поиска значения $F(b)$ функции $F(x)$, определенной на отрезке $[a,\,b]$, причем $F(a)=0$;

2) используя оценки для $\Delta F(x)$, лемму или другие подобные соображения, получают формулу $dF(x)=f(x)dx$;

3) из формулы Ньютона — Лейбница выводят равенство $F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$.

Рассмотрим некоторые применения метода дифференциалов в геометрии.

Теорема 2 (**формула для площади в полярных координатах**). Пусть в полярных координатах (ρ,φ) плоская фигура Φ ограничена кривой $\rho=\rho(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, $(\alpha<\beta)$. Функция $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$. Тогда площадь фигуры Φ равна

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Док–во методом дифференциалов: площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами, составляющими с полярной осью углы α и $\varphi > \alpha$, обозначим через $S(\varphi)$. Тогда $S(\alpha) = 0$, а $S(\beta)$ — искомая площадь. Фигура между лучами φ и $\varphi+\Delta\varphi$ содержится в круговом секторе с углом $\Delta\varphi$ радиуса $\rho_M = \max_{t\in[\varphi,\varphi+\Delta\varphi]}\rho(t)$ и содержит круговой сектор с тем же углом $\Delta\varphi$ радиуса $\rho_m = \min_{t\in[\varphi,\varphi+\Delta\varphi]}\rho(t)$. Поэтому площадь ΔS этой фигуры удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2}\,\rho_m^2\Delta\varphi \leqslant \Delta S \leqslant \frac{1}{2}\,\rho_M^2\Delta\varphi.$$

Полагая $F = S, h = 1, g = 1/2\,\rho^2$, мы видим, что условия леммы выполняются, а значит, $dS = 1/2\ \rho^2(\varphi)\ d\varphi$. Интегрируя dS от α до β получаем указанную формулу.

9.3 Объем тела

Теорема 3 (**формулы для объемов тел вращений**). Пусть фигура Φ — криволинейная трапеция непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$. Тогда
а) объем тела, образованого вращением фигуры Φ вокруг оси Ox, равен

$$V_{Ox} = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

б) При $a \geqslant 0$ и вращении фигуры Φ вокруг оси Oy получаем тело с объемом

$$V_{Oy} = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Док–во методом дифференциалов: а) объем тела, образованого вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f на отрезке $[a,\,x]$, обозначим через $V(x)$. Тогда $V(a) = 0$, а $V(b)$ — искомый объем. Приращение ΔV этой функции в точке x есть объем части рассматриваемого тела между плоскостями с абциссами x и $x + \Delta x$. Эта часть содержится и содержит круговые цилиндры ширины Δx радиуса $f_M = \max_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$ и $f_m = \min_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$ соответственно, поэтому

$$\pi f_m^2\Delta x \leqslant \Delta V \leqslant \pi f_M^2\Delta x.$$

Применяя лемму, когда $F = V, h = 1, g = \pi f^2$, получаем $dV = \pi f^2(x)\,dx$ и указанную формулу для V_{Ox}.

б) Обозначим теперь через $V(x)$ объем тела, образованого вращением вокруг оси Oy той же криволинейной трапеции на отрезке $[a,\,x]$. Две круговые цилиндрические поверхности радиуса x и $x + \Delta x$ вырезают из рассматриваемого тела часть объемом ΔV. Эта часть содержится и содержит цилиндрическую оболочку радиуса x, толщиной Δx и высотой $f_M = \max_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$ и $f_m = \min_{t\in[x,x+\Delta x]} f(t)$ соответственно. Объем цилиндрической оболочки радиуса x, толщиной Δx и высотой h равен $\pi(x + \Delta x)^2h - \pi x^2h = \pi h(2x\Delta x + \Delta x^2)$. Поэтому

$$\pi f_m \leqslant \frac{\Delta V(x)}{2x\Delta x + \Delta x^2} \leqslant \pi f_M,$$

по лемме $dV = 2\pi x f(x)\,dx$, и из формулы Ньютона — Лейбница следует утверждение б) теоремы. $\triangleright$

Задача 3. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси Ox арки циклоиды

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = b(1 - \cos t), \qquad t \in [0,\, 2\pi].$$

Теорема 4. Пусть тело заключено между плоскостями $x = a$ и $x = b$, а все сечения этого тела плоскостями, перпендикулярными координатной оси Ox, известны, причем зависимость $S(x)$ площади сечения от абсциссы $x \in [a, b]$ является заданной функцией, непрерывной на отрезке $[a, b]$. Тогда объем этого тела равен

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Без док–ва.

10 Кривые в пространстве

См. [И: §9.1–9.3], [З: гл. 6, §4].

10.1 Векторные функции скалярного аргумента и их пределы

Будем отождествлять каждую точку M пространства $\mathbb{R}^m$ с ее радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$. Отображение $\vec{r}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^m$ отрезка $[a, b]$ в m–мерное пространство $\mathbb{R}^m$ называют **вектор-функцией** (или **векторной функцией**) скалярного аргумента t. Если

$$\vec{r}(t) = \big(x_1(t), \dots, x_m(t)\big)\ , \qquad t \in [a, b]\ , \tag{1}$$

то отображение $\vec{r}$ определяется действительными функциями $x_1(t), \dots, x_m(t)$ одного действительного переменного t с общей областью определения $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, которые называются **координатными функциями вектор-функции** $\vec{r}(t)$.

Точку $M \in \mathbb{R}^m$ (вектор $\vec{p} = \overrightarrow{OM}$) называют **пределом** вектор-функции $\vec{r}(t)$ при $t \to t_0$, если длина вектора $\vec{r}(t) - \vec{p}$ стремится к нулю при $t \to t_0$, т.е. $\lim_{t\to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{p}| = 0$. Обозначают $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{p}$ или "$\vec{r}(t) \to \vec{p}$ при $t \to t_0$".

Теорема 1 (**предел вектор-функции**). Вектор-функция (1) имеет своим пределом при $t \to t_0$ вектор $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to t_0} x_i(t) = p_i, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Док–во: $$\big|\vec{r}(t) - \vec{p}\big| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(x_i(t) - p_i\big)^2} \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_i(t) \to p_i \quad i = 1, \dots, m,$$

так как из неравенства треугольника для длин векторов следует, что

$$\forall j = 1, \ldots, m \qquad \left|x_j(t) - p_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i(t) - p_i\right)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left|x_i(t) - p_i\right|. \qquad \triangleright$$

Вектор-функцию $\vec{r}\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}^m$ называют **непрерывной в точке** $t_0 \in [a, b]$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

10.2 Кривая как годограф векторной функции

Пусть задана вектор-функция $\vec{r}(t)$. При изменении параметра t конец вектора $\vec{r}(t)$ описывает множество Γ в пространстве $\mathbb{R}^m$, которое называют **годографом вектор-функции** $\vec{r}(t)$ (рис. 5). Если $m = 3$ или $m = 2$, а t — время, то говорят о траектории движущейся точки.

Для простоты мы рассматриваем кривые без самопересечения. **Кривой** Γ в $\mathbb{R}^m$ называют образ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при непрерывном инъективном его отображении в пространство $\mathbb{R}^m$. Одну и ту же кривую можно представить с помощью непрерывных отображений различными способами. Выбор какого-либо конкретного отображения определяет **параметризацию кривой**. **Параметризованной кривой** называют непрерывное инъективное отображение отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{R}^m$. При этом соответствующую векторную функцию называют **векторной функцией параметризованной кривой**, а ее аргумент t — **параметром параметризованной кривой**.

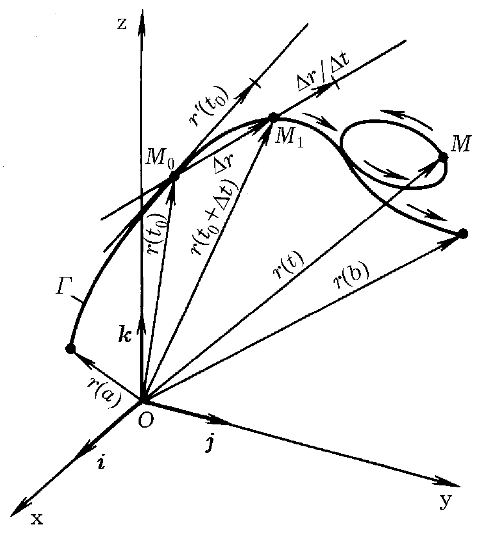

Рис. 5

Как известно, любой отрезок прямой в $\mathbb{R}^m$ можно представить в виде образа непрерывного инъективного отображения $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Поэтому отрезок есть частный случай кривой.

Концевыми точками кривой Γ с параметризацией $\vec{r}(t),\ t \in [a, b]$, называют две точки с радиус-векторами $\vec{r}(a)$ и $\vec{r}(b)$. Концевые точки кривой не зависят от выбора ее параметризации.

Параметрическими уравнениями параметризованной кривой с векторной функцией (1) называют уравнения

$$x_i = x_i(t), \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad t \in [a, b] \ ,$$

векторным уравнением этой кривой называют уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [a, b]$.

Пример 1. Винтовая линия (рис. 6) задается параметрическими уравнениями

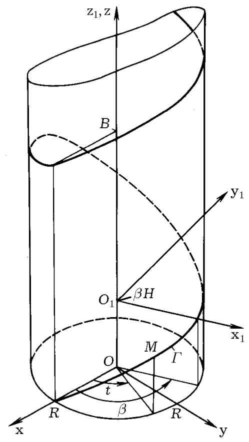

Рис. 6

$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = Ht$, или векторным уравнением $\vec{r} = R\cos t\,\vec{i} + R\sin t\,\vec{j} + Ht\,\vec{k}, \quad t \in [a, b]$.

Кривая в $\mathbb{R}^3$ может быть представлена как линия пересечения двух поверхностей. Такое представление соответствует заданию кривой системой двух уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0 \ , \qquad F_2(x, y, z) = 0 \ . \tag{2}$$

Для получения параметризации такой кривой (возможно только части кривой) достаточно взять в качестве параметра одну из координат (например, x) и из системы (2) выразить через этот параметр остальные координаты (y и z).

Кривая Γ называется **плоской**, если она лежит в некоторой плоскости пространства $\mathbb{R}^m$. Выбор координат на $\mathbb{R}^m$ таким образом, что x_1, x_2 являются координатами на данной плоскости, а x_i при $i = 3, \ldots, m$ постоянны, а также выбор параметризации кривой позволяет задать плоскую кривую уравнениями

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_i = 0, \qquad i = 3, \ldots, m, \qquad t \in [a, b] \ . \tag{3}$$

Поэтому любую плоскую кривую можно понимать как кривую в $\mathbb{R}^2$.

10.3 Касательная к кривой и производная векторной функции

Касательной к кривой Γ в ее точке M_0 называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через M_0 и через отличную от нее точку M_1 этой кривой, при стремлении M_1 к M_0 (см. рис. 5).

Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

то его называют **производной векторной функции** $\vec{r}(t)$ в точке t_0 и обозначают $\vec{r}\,'(t_0)$.

Теорема 2. $\quad \vec{r}\,'(t_0) = \big(x_1'(t_0), \dots, x_m'(t_0)\big)$.

Док–во следует из определений и теоремы 1.

Кривая Γ называется **гладкой** , если существует такая ее параметризация (1), что векторная функция $\vec{r}(t)$ имеет непрерывные производные в каждой точке отрезка $[a, b]$.

Точка M_0 гладкой кривой Γ называется **регулярной точкой кривой**, если существует такая параметризация $\vec{r}(t)$ кривой Γ, которая имеет непрерывную производную и $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$, где $\vec{r}(t_0) = M_0$.

Теорема 3 (**достаточное условие существования касательной**). В регулярной точке кривой касательная существует. Ненулевая производная векторной функции какой–либо параметризации кривой Γ есть направляющий вектор касательной к кривой Γ в соответствующей точке.

Док–во. Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b]$, — такое векторное уравнение кривой, что $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$ (см. рис. 5). Тогда $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$ — направляющий вектор секущей, проходящей через точки с радиус-векторами $\vec{r}(t_0)$ и $\vec{r}(t)$. При $t \to t_0$ этот вектор стремится к нулю. Вектор $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0}$, $\Delta t = t - t_0$, также есть направляющий вектор данной секущей, и при $t \to t_0$ он стремится к $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. А значит, касательная к кривой Γ в точке $\vec{r}(t_0)$ существует, и $\vec{r}\,'(t_0)$ — ее направляющий вектор.

Пример 2. Точка $(0, 0)$ кривой $y^2 = x^3$ не является регулярной: непрерывно–дифференцируемая параметризация в ее окрестности возможна только в случае, когда $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$ при $(0, 0) = \vec{r}(t_0)$. (**Задача:** докажите это.) Однако касательная к данной кривой в данной точке существует $(y = 0)$. Таким образом, достаточное условие из теоремы 3 не является необходимым. $\triangleright$

Геометрический смысл производной векторной функции: ненулевая производная векторной функции есть направляющий вектор касательной к годографу векторной функции в соответствующей точке.

Уравнение касательной параметризованной кривой (1) при $m = 3$ в регулярной точке $M_0(p_1, p_2, p_3)$:

$$\frac{x_1 - p_1}{x_1'(t_0)} = \frac{x_2 - p_2}{x_2'(t_0)} = \frac{x_3 - p_3}{x_3'(t_0)} \ ,$$

где t_0 - значение параметра, соответствующее точке M_0 : $x_1(t_0) = p_1, \ x_2(t_0) = p_2, \ x_3(t_0) = p_3$.

Уравнение касательной плоской параметризованной кривой (3) в регулярной точке $M_0(p_1, p_2)$:

$$\frac{x_1 - p_1}{x_1'(t_0)} = \frac{x_2 - p_2}{x_2'(t_0)} \ .$$

Вывод этих уравнений основан на известных фактах аналитической геометрии.

Задача 1. Найдите касательную к винтовой линии в точке $(0, R, H\pi/2)$.

Механический смысл производной векторной функции: в случае, когда $m = 3$ или $m = 2$, а t имеет смысл времени, $\vec{r}\,'(t_0)$ является вектором мгновенной скорости движения точки по траектории, совпадающей с кривой $\vec{r}(t)$.

Теорема 4 (**правила дифференцирования векторных функций**). Если существуют производные $\vec{r}_1\,'$, $\vec{r}_2\,'$ и f' векторных функций $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ и скалярной функции $f(t)$, то

$$
\begin{array}{ll}
1)\ (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' + \vec{r}_2\,', & 2)\ (f\vec{r}_1)' = f'\vec{r}_1 + f\vec{r}_1\,', \\
3)\ \big(\vec{r}(f(t))\big)' = f'(t)\vec{r}\,'(f(t)), & 4)\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1\,', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2\,'), \\
5)\ \text{при } m = 3: \quad (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2\,'. &
\end{array}
$$

Доказательство этих формул следует из определений и теоремы 2.

Задача 2. Докажите формулу 4).

Следствие. Если $\big|\vec{r}(t)\big| = \mathrm{const}$, то векторы $\vec{r}\,'(t)$ и $\vec{r}(t)$ ортогональны.

Док–во. $\quad 0 = (|\vec{r}\,|^2)' = (\vec{r}, \vec{r})' = (\vec{r}\,', \vec{r}) + (\vec{r}, \vec{r}\,') = 2(\vec{r}\,', \vec{r}).$

Геометрический смысл следствия: касательная к любой точке кривой, лежащей на сфере, ортогональна радиус-вектору этой точки.

11 Длина дуги спрямляемой кривой

См. [ЗИК: §9.2], [З: гл. 6, §4], [АСЧ: стр. 240], [Р: стр. 154].

11.1 Определение и формула для вычисления

Если M_1 и M_2 – точки кривой γ, то **дугой** $\breve{M_1 M_2}$ **кривой** γ называют кривую, состоящую из точек кривой γ , лежащих между M_1 и M_2 . Если параметризация кривой γ задана векторной функцией $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, и $M_1 = \vec{r}(t_1)$, $M_2 = \vec{r}(t_2)$, $t_1 < t_2$, то дуга $\breve{M_1 M_2}$ задается той же векторной функцией $\vec{r}(t)$, но с областью определения $t \in [t_1, t_2]$.

Ломаной, вписанной в кривую γ, называют кривую, состоящую из отрезков $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, где M_0 и M_n - концевые точки кривой γ , а $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ - последовательные точки, лежащие на кривой γ (рис. 7).

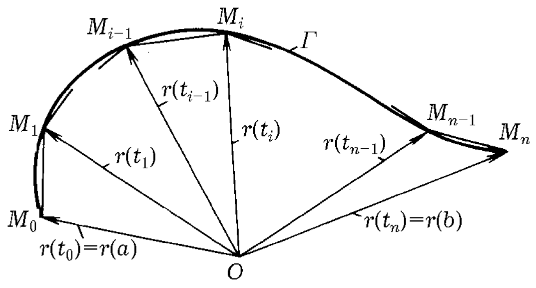

Рис. 7

Длиной $L(\gamma)$ **кривой** γ называется точная верхняя грань длин ломаных, вписанных в кривую γ. Кривая называется **спрямляемой**, если ее длина существует и конечна.

Теорема 1 (**достаточное условие спрямляемости кривой**). Гладкая кривая спрямляема. Длина $L(\gamma)$ гладкой кривой γ с параметризацией $\vec{r}(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_m(t)\big)$, $t \in [a, b]$, $a < b$, вычисляется по формуле

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \big|\vec{r}\,'(t)\big| dt = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^m \big(x_i'(t)\big)^2} dt.$$

Докажем сначала обобщение на векторный случай теоремы об оценке модуля интеграла. При этом определенный интеграл от векторной функции будем понимать как вектор, состоящий из определенных интегралов от ее координатных функций.

Лемма (**оценка модуля интеграла векторной функции**). Для непрерывной на отрезке $[a, b], a < b$, векторной функции $\vec{r}(t)$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b \vec{r}(t) dt\right| \leqslant \int\limits_a^b \big|\vec{r}(t)\big| dt.$$

Док–во леммы. Пусть $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ — координатные функции вектор-функции $\vec{r}(t)$. По условию векторная функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а значит, непрерывны функции $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ и $\big|\vec{r}(t)\big|$. Поэтому определены и конечны все интегралы леммы, а значит, соответствующие интегральные суммы не зависят от выбора разбиений, и для доказательства неравенства леммы мы можем учитывать только равномерные разбиения отрезка. Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей и положим $t_j = a + \frac{b-a}{n} j$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Преобразуя суммы и используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i(t_j)\right)^2 &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j_1=1}^n x_i(t_{j_1})\right)\left(\sum_{j_2=1}^n x_i(t_{j_2})\right) = \\
&= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i(t_{j_1}) x_i(t_{j_2})\right) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2(t_{j_1})} \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2(t_{j_2})} = \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2(t_j)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, интегральные суммы для функций $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ и $\big|\vec{r}(t)\big|$, соответствующие разбиению $P = (t_0, \ldots, t_n)$ с отмеченными точками $\xi_1 = t_1, \ldots, \xi_n = t_n$ отрезка $[a,\, b]$, связаны неравенством

$$\sum_{i=1}^m \sigma(x_i; P, \xi)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n x_i(t_j) \frac{b-a}{n}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2(t_j)}\ \frac{b-a}{n}\right)^2 = \sigma(|\vec{r}|; P, \xi)^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу $\lambda \to 0$ (в данном случае это означает $n \to \infty$), получаем утверждение леммы. $\triangleright$

Док–во теоремы 1. Рассмотрим произвольное разбиение $P = (t_0, \dots, t_n)$ отрезка $[a,\, b]$ и соответствующую ломаную $\vec{r}(t_0)\vec{r}(t_1)\dots\vec{r}(t_n)$, вписанную в кривую γ. Для длины L_P этой ломаной, используя формулу Ньютона — Лейбница, лемму и аддитивность интеграла, получаем

$$L_P = \sum_{i=1}^{n}\bigl|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\bigr| = \sum_{i=1}^{n}\left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)dt\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} |\vec{r}\,'(t)|dt = \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt$$

Таким образом, длина любой ломанной, вписанной в кривую γ, ограничена сверху указанным интегралом. По теореме о точных гранях существует и конечна точная верхняя грань длин таких ломаных. А значит, кривая γ спрямляема, а ее длина удовлетворяет неравенству

$$L(\gamma) = \sup_P L_P \leqslant \int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt.$$

Для доказательства равенства рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как производная векторной функции $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то непрерывны на этом отрезке производные $x_1'(t), \dots, x_m'(t)$ ее координатных функций. По теореме Кантора эти функции равномерно непрерывны на отрезке $[a, b]$, а значит, найдется такое число $\delta > 0$, что $\bigl|\vec{r}\,'(t) - \vec{r}\,'(s)\bigr| \leqslant \sum_{j=1}^{m}\bigl|x_j'(t) - x_j'(s)\bigr| < \varepsilon$, если $|t - s| < \delta$. Пусть параметр разбиения P меньше δ. Если $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, то $|t - t_i| < \delta$ и поэтому

$$|\vec{r}\,'(t)| = |\vec{r}\,'(t_i) + \vec{r}\,'(t) - \vec{r}\,'(t_i)| \leqslant |\vec{r}\,'(t_i)| + |\vec{r}\,'(t) - \vec{r}\,'(t_i)| < |\vec{r}\,'(t_i)| + \varepsilon.$$

Из доказанного неравенства и свойства монотонности интеграла получаем

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl|\vec{r}\,'(t)\bigr|dt - \varepsilon\Delta t_i \leqslant \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl(|\vec{r}\,'(t_i)| + \varepsilon\bigr)dt - \varepsilon\Delta t_i = |\vec{r}\,'(t_i)|\Delta t_i.$$

Используя свойства интеграла, неравенство треугольника, лемму и доказанное ранее неравенство $\bigl|\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t)\bigr| < \varepsilon$, получаем

$$|\vec{r}\,'(t_i)|\Delta t_i = \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t_i)dt\right| = \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)dt + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl(\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t)\bigr)dt\right| \leqslant \left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \vec{r}\,'(t)dt\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl(\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t)\bigr)dt\right| \leqslant \left|\ \vec{r}(t)\Bigr|_{t_{i-1}}^{t_i}\right| + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl|\vec{r}\,'(t_i) - \vec{r}\,'(t)\bigr|dt \leqslant \bigl|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\bigr| + \varepsilon\Delta t_i.$$

Суммируя доказанные неравенства по $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \bigl|\vec{r}\,'(t)\bigr|dt \leqslant \sum_{i=1}^{n}\bigl|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\bigr| + 2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \leqslant L(\gamma) + 2\varepsilon(b - a).$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует, что $\int\limits_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt \leqslant L(\gamma)$, и это завершает доказательство теоремы. $\triangleright$

11.2 Натуральная параметризация

Параметризацию кривой γ называют **натуральной**, если в качестве параметра взята длина дуги кривой. Т.е. параметризация определяется таким отображением $s \longmapsto \vec{r}(s)$ отрезка $[0, b]$ в $\mathbb{R}^m$, что $\vec{r}(0)$ есть концевая точка кривой γ, а длина дуги между точками $\vec{r}(0)$ и $\vec{r}(s)$ равна s. **Натуральный параметр** обозначают через s.

Следствие. 1. Длина любой дуги гладкой кривой не меньше длины отрезка, соединяющего ее концевые точки.

2. В регулярной точке $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$, где s — натуральный параметр кривой.

3. Если точка M, двигаясь по гладкой кривой γ, стремится к точке $M_0 \in \gamma$, то

$$\lim_{M \to M_0} \frac{L(M_0\breve{\ }M)}{L(\overline{M_0M})} = 1,$$

где $L(M_0\breve{\ }M)$ — длина дуги $M_0\breve{\ }M$, а $L(\overline{M_0M})$ — длина отрезка $\overline{M_0M}$.

Док–во. 1. Отрезок $\overline{M_0M}$ — частный случай ломанной, вписанной в кривую $M_0\breve{\ }M$, а по определению длина кривой не меньше длины любой ломанной, вписанной в нее.

2. Из теоремы 1 следует, что $\left|\dfrac{ds}{dt}\right| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$. Поэтому $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| \Big/ \left|\dfrac{ds}{dt}\right| = 1$.

3. Выберем в качестве параметра кривой $M_0\breve{\ }M$ натуральный параметр, причем $\vec{r}(s_0) = M_0,\ \vec{r}(s) = M,\ \Delta s = s - s_0$. Тогда

$$\lim_{M \to M_0} \frac{L(\overline{M_0M})}{L(M_0\breve{\ }M)} = \lim_{s \to s_0} \frac{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \big(x_i(s) - x_i(s_0)\big)^2}}{|s - s_0|} = \lim_{\Delta s \to 0} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta s}\right)^2} = \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1. \quad \triangleright$$

11.3 Формулы для длины дуги плоской кривой

Пусть k — натуральное число. Функцию f, определенную на множестве $A \subseteq \mathbb{R}$, называют k **раз непрерывно дифференцируемой на множестве** A, если в каждой точке $x \in A$ существует ее производная $f^{(k)}(x)$ порядка k, которая непрерывна на множестве A. В случае $k = 1$ такую функцию называют **непрерывно дифференцируемой**, в случае $k = 2$ — **дважды непрерывно дифференцируемой**. Множество всех k раз непрерывно дифференцируемых на множестве A функций обозначают $C^k A$.

Теорема 2. а) Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,\, b]$, то плоская кривая, заданная параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t), t \in [a,\, b]$, имеет длину

$$\int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\, dt.$$

б) Длина графика непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ равна

$$\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx.$$

в) Если функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$, то длина кривой, заданной в полярной системе координат (φ,ρ) уравнением $\rho=\rho(\varphi)$, равна

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\rho(\varphi)\big)^2+\big(\rho'(\varphi)\big)^2}\,d\varphi.$$

Док–во. Утверждение а) следует из теоремы 1 в случае $m=2$. Полагая $x=t, y=f(t)$ получаем отсюда б). В полярных координатах, считая φ параметром, имеем параметризацию $x(\varphi)=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y(\varphi)=\rho(\varphi)\sin\varphi$ кривой. Так как

$$x'(\varphi)=\rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi,\quad y'(\varphi)=\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi,$$

то $\big(x'(\varphi)\big)^2+\big(y'(\varphi)\big)^2=\big(\rho(\varphi)\big)^2+\big(\rho'(\varphi)\big)^2$. А значит, из а) получаем в). $\triangleright$

Задача. Найдите длину кардиоиды $\rho(\varphi)=a(1+\cos\varphi)$.

12 Кривизна кривой

См. [И: §9.4, 9.5, дополнение 9.1].

Для простоты рассмотрим только случаи $m=3$ и $m=2$.

12.1 Характеристика искривленности линии

Угол θ между касательными к кривой в точках M и N называется **углом смежности** дуги $\breve{MN}$.

Если две дуги $\breve{MN}$ и $\breve{M'N'}$ имеют одинаковую длину ($L(\breve{MN})=L(\breve{M'N'})$) и угол смежности первой дуги больше угла смежности второй дуги ($\theta>\theta'$), то первая дуга искривлена сильнее второй дуги (приведите рисунок, иллюстрирующий эту ситуацию). Таким образом, угол смежности характеризует искривленность дуги при условии постоянства ее длины. Поэтому вводят понятие **средней кривизны дуги** как отношение угла смежности дуги к ее длине: $k_{\text{ср.}}=\dfrac{\theta}{L(\breve{MN})}$, а **кривизной кривой** γ в точке M_0 называют неотрицательное число k , равное пределу средней кривизны $\dfrac{\theta}{L(\breve{M_0M})}$ дуги $\breve{M_0M}$ при стремлении точки M к точке M_0, при этом точка M остается на кривой γ.

Пример 1. Кривизна окружности радиуса r в любой точке равна $k=\dfrac{1}{r}$.

Теорема 1. Кривизна кривой в $\mathbb{R}^3$, заданной дважды непрерывно дифференцируемой векторной функцией $\vec{r}(t)$, в регулярной точке $\vec{r}(t_0)$ ($\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|\neq 0$) вычисляется по формуле

$$k=\frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|^3}.$$

Док–во. Пусть $M_0 = \vec{r}(t_0)$, $M = \vec{r}(t)$ — точки кривой, M_0 — регулярная точка, θ — угол смежности дуги $\breve{M_0M}$, $\Delta t = t - t_0$. В виду неравенства $\left|\vec{r}\,'(t_0)\right| \neq 0$ и непрерывности $\vec{r}\,'$ при малых отклонениях Δt имеем также $\left|\vec{r}\,'(t)\right| \neq 0$. Из определения θ, геометрического смысла производной, формулы Тейлора для $\vec{r}\,'(t)$ и свойств векторного произведения получаем

$$\sin\theta = \frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,'(t)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|\left|\vec{r}\,'(t)\right|} = \frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\left(\vec{r}\,'(t_0)+\Delta t\,\vec{r}\,''(t_0)+o(\Delta t)\right)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|\left|\vec{r}\,'(t)\right|} =$$

$$= |\Delta t|\,\frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|\left|\vec{r}\,'(t)\right|} + o(\Delta t).$$

Отсюда, из первого замечательного предела и непрерывности $\vec{r}\,'(t)$ следует

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}\,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sin\theta}{|\Delta t|} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|\left|\vec{r}\,'(t)\right|} + \frac{o(\Delta t)}{|\Delta t|}\right) = \frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|^2}.$$

Наконец, из определения кривизны и формулы для длины кривой получаем

$$k = \lim_{M\to M_0}\frac{\theta}{L(\breve{M_0M})} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\theta}{|\Delta t|}\,\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta t|}{L(\breve{M_0M})} = \frac{\left|\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|^2}\,\frac{1}{\left|\vec{r}\,'(t_0)\right|}.$$ ▷

Теорема 2 (**кривизна графика функции**). Если функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке x, то кривизна графика этой функции в точке $\left(x, f(x)\right)$ равна

$$k(x) = \frac{\left|f''(x)\right|}{\left(1+\left(f'(x)\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Док–во. Считая x параметром, представим кривую $y = f(x)$ векторной функцией $\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$. Тогда $\vec{r}\,'(x) = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$, $\vec{r}\,''(x) = f''(x)\vec{j}$,

$$\left|\vec{r}\,'(x)\times\vec{r}\,''(x)\right| = \left|f''(x)\;\vec{i}\times\vec{j}\right| = \left|f''(x)\right|, \quad \left|\vec{r}\,'(x)\right| = \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2},$$

и из теоремы 1 следует данная теорема.

12.2 Центр кривизны. Эволюта и эвольвента

Пусть k — кривизна плоской кривой γ в точке $M_0 \in \gamma$. Величину $R = 1/k$, обратную кривизне, называют **радиусом кривизны кривой** γ **в точке** M_0. Если $k = 0$, то радиус R кривизны кривой полагают равным $+\infty$.

Пусть плоская кривая γ имеет ненулевую кривизну в точке M_0. Выберем на плоскости такую систему координат, в которой γ задается уравнением $y = f(x)$, а x_0 — абсцисса точки M_0. Тогда из теоремы 2 следует, что $f''(x_0) \neq 0$, т.е. точка M_0 есть точка выпуклости (вогнутости) кривой γ, а значит, в окрестности M_0 кривая лежит по одну сторону от касательной. Рассмотрим нормаль к кривой γ в точке M_0. Точку C_0 нормали, расположенной на расстоянии радиуса кривизны от точки M_0 в сторону вогнутости кривой называют **центром кривизны кривой**

в точке M_0, а круг (окружность) с центром в C_0, радиус которого равен радиусу кривизны, называют **кругом (окружностью) кривизны кривой в точке** M_0 (приведите рисунок, иллюстрирующий эти определения).

Задача 1. Найдите радиус, круг и центр кривизны окружности в произвольной точке.

Через C^2 обозначим класс гладких кривых, заданных дважды непрерывно дифференцируемыми векторными функциями.

Теорема 3 (**геометрический смысл окружности кривизны**). Окружность кривизны плоской гладкой кривой $\gamma \in C^2$ в точке M — это единственная окружность, которая касается кривой в точке M с порядком 2, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\bigl|f(x) - g(x)\bigr|}{|x - x_0|^2} = 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — функции, графики которых в окрестности точки x_0 совпадают с кривой и окружностью соответственно, x_0 — абсцисса точки M.

Док–во следует из формулы Тейлора для функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0. Действительно, из определений следует, что кривая γ и ее окружность кривизны имеют одинаковые касательные, выпуклость и кривизну. Поэтому $f'(x_0) = g'(x_0)$, так как совпадают касательные к графикам этих функций. Производные $f''(x_0)$ и $g''(x_0)$ имеют одинаковые знаки, поскольку выпуклость этих функций совпадает. Наконец, из формулы для кривизны теоремы 2, равенства кривизн и первых производных функций f и g в точке x_0 получаем равенство $\bigl|f''(x_0)\bigr| = \bigl|g''(x_0)\bigr|$. Таким образом, многочлены Тейлора порядка 2 для функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 совпадают. Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получаем $f(x) - g(x) = o\bigl(|x - x_0|^2\bigr)$, а значит, графики функций $f(x)$ и $g(x)$ касаются в точке M с порядком 2.

Единственность указанной окружности следует из того, что любая окружность однозначно определяется касательной в заданной точке, направлением выпуклости и кривизной (радиусом). $\triangleright$

Теорема 4 (**координаты центра кривизны**). Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки x_0, и $f''(x_0) \neq 0$, то координаты ξ, η центра кривизны графика этой функции в точке $\bigl(x_0, y_0 = f(x_0)\bigr)$ равны

$$\xi = x_0 - f'(x_0)\frac{1 + \bigl(f'(x_0)\bigr)^2}{f''(x_0)} \qquad \text{и} \qquad \eta = y_0 + \frac{1 + \bigl(f'(x_0)\bigr)^2}{f''(x_0)}. \tag{1}$$

Док–ва. Из теоремы 2 и неравенства $f''(x_0) \neq 0$ следует, что $k(x_0) \neq 0$, а значит, центр C_0 кривизны кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ определен. При $f'(x_0) \neq 0$ уравнение нормали к этой кривой в точке M_0 (см. рис. 8) имеет вид

$$y_{\text{н}} = y_0 - \frac{x_{\text{н}} - x_0}{f'(x_0)},$$

где $x_{\text{н}}$ и $y_{\text{н}}$ — координаты произвольной точки нормали. Поскольку центр C_0 кривизны лежит на нормали, то его координаты ξ и η тоже должны удовлетворять этому уравнению, т.е.

$$\eta = y_0 - \frac{\xi - x_0}{f'(x_0)}. \tag{2}$$

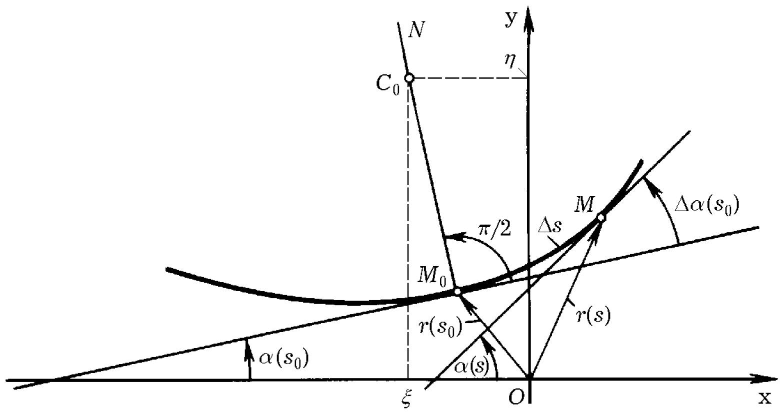

Рис. 8

В силу определения центра кривизны расстояние между точками $M_0(x_0; y_0)$ и $C_0(\xi; \eta)$ равно радиусу кривизны $R(x_0) = \dfrac{1}{k(x_0)}$. Поэтому

$$\sqrt{(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2} = \frac{1}{k(x_0)}. \tag{3}$$

Из (2) следует $\xi - x_0 = -(\eta - y_0) f'(x_0)$. Подставляя это выражение и формулу для $k(x_0)$ из теоремы 2 в (3), находим

$$\sqrt{(\eta - y_0)^2 \big(f'(x_0)\big)^2 + (\eta - y_0)^2} = \frac{\Big(1 + \big(f'(x_0)\big)^2\Big)^{3/2}}{|f''(x_0)|}.$$

Отсюда

$$|\eta - y_0| = \frac{1 + \big(f'(x_0)\big)^2}{\big|f''(x_0)\big|}. \tag{4}$$

Если $f''(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ строго выпукла вниз. В этом случае $\eta > y_0$ (см. рис. 8) и поскольку $|f''(x_0)| = f''(x_0)$, то

$$\eta - y_0 = \frac{1 + \big(f'(x_0)\big)^2}{f''(x_0)}, \quad \xi - x_0 = -f'(x_0) \frac{1 + \big(f'(x_0)\big)^2}{f''(x_0)}.$$

Итак, при $f''(x_0) > 0$ формулы для координат центра кривизны имеют вид (1).

Если $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ строго выпукла вверх, и поэтому $\eta < y_0$. Т.е. и в этом случае модули в (4) можно убрать, а значит, получить ту же самую формулу (1).

Если $f'(x_0) = 0$, т.е. касательная к кривой горизонтальна, то $k(x_0) = |f''(x_0)|$, нормаль вертикальна и (1) остается в силе: $\xi = x_0$ и $\eta = f(x_0) + 1/f''(x_0)$. ▹

Отметим, что случай $f''(x_0) = 0$ соответствует точке перегиба, в которой радиус кривизны, а значит, ξ и η бесконечны.

Множество центров кривизны кривой называют ее **эволютой**. По отношению к своей эволюте кривую называют **эвольвентой** (иногда **инволютой** или **разверткой**).

Теорема 5 (**свойства эволюты**).

(1) Нормаль к кривой Γ является касательной к ее эволюте Ω в соответствующем центре кривизны (см. рис. 9).

(2) При строго монотонном изменении радиуса R кривизны кривой Γ его приращение ΔR при перемещении центра кривизны данной кривой по дуге ее эволюты Ω равно по абсолютному значению длине этой дуги эволюты.

Без док–ва.

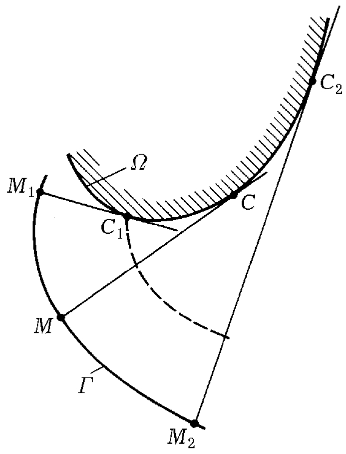

Рис. 9

Из теоремы 5 следует **механический способ построения по заданной кривой одной из ее эвольвент**. А именно, если нерастяжимую нить, натянутую на жесткий контур, соответствующий заданной кривой Ω с дугой C_1C_2 (см. рис. 9), сматывать с этого контура, оставляя ее натянутой, то конец нити опишет дугу M_1M_2 эвольвенты Γ заданной кривой.

Задача 2. Покажите, что эволюта циклоиды — циклоида, эволюта эллипса — астроида. Для этого задайте циклоиду и эллипс параметрически и используйте теорему 4 и формулу для производной параметрически заданной функции.

13 Несобственные интегралы

См. [ЗИК: §7.1, 7.2, 7.4, 7.5, 7.8], [З: гл. 6, §5].

Необходимым условием существования определенного интеграла является ограниченность подынтегральной функции и конечность отрезка интегрирования. Однако при рассмотрении теоретических вопросов и решении прикладных задач нередко появляется необходимость использовать при интегрировании неограниченные функции и бесконечные промежутки. Возникающие при этом **интегралы** принято называть **несобственными**.

13.1 Интегралы по бесконечному промежутку

Примеры. Рассмотрим интегралы

$$1)\ \int_1^b \frac{dx}{x^2}, \qquad 2)\ \int_1^b \frac{dx}{x}, \qquad 3)\ \int_0^b \cos x\, dx.$$

Будем увеличивать отрезок интегрирования. Вычисляя эти интегралы и переходя к пределу при $b \to +\infty$, получаем: 1) число 1, 2) $+\infty$, 3) предел не существует.

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном полуинтервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Тогда для любого значения $b \in [a, +\infty)$ существует функция

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (a \leqslant b < +\infty).$$

Предел функции $\Phi(b)$ при $b \to +\infty$ называют **несобственным интегралом** от функции $f(x)$ **по бесконечному промежутку** $[a, +\infty)$ (или **несобственным интегралом первого рода**) и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Из рассмотренных примеров следует, что возможны три варианта: несобственный интеграл может быть 1) числом, 2) бесконечностью и 3) не существовать. Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, а если предел бесконечен или не существует, то — несобственный интеграл **расходится**.

В случае $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in [a, +\infty)$ значение сходящегося несобственного интеграла геометрически соответствует площади бесконечно длинной криволинейной трапеции (рис. 10), заключенной между прямой $x = a$, осью Ox и графиком функции $f(x)$.

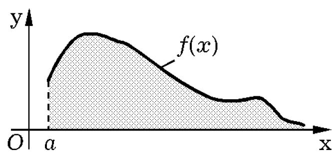

Рис. 10

Аналогично определяется несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наконец, если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a,\, b]$, то для произвольного $c \in \mathbb{R}$ соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{1}$$

определяют несобственный интеграл от функции $f(x)$ по бесконечному промежутку $(-\infty,\, +\infty)$ и говорят, что такой несобственный интеграл сходится, если независимо один от другого сходятся оба несобственных интеграла в правой части (1).

Утверждение 1. Сходимость и значение несобственного интеграла (1) не зависят от положения точки $c \in \mathbb{R}$.

Док–во будет приведено позже.

Пример 4. Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ $(a > 0)$ сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$.

13.2 Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(x)$ определена в полуинтервале $[a, b)$, неограничена при $x \to b-$ (это значит, что функция не является ограниченной ни в какой окрестности точки b, где точка b может быть как конечной, так и бесконечной), но интегрируема на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$. Тогда для любого $\eta \in [a, b)$ существует функция

$$\Phi(\eta) = \int_a^\eta f(x)\,dx \qquad (a \leqslant \eta < b),$$

которая непрерывна на $[a, b)$ (см. теорему 1 из §8). Предел функции $\Phi(\eta)$ при $\eta \to b-$ называют **несобственным интегралом от неограниченной функции** $f(x)$ по промежутку $[a, b)$ (или **несобственным интегралом второго рода**) и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$. Если предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**, а если же этот предел бесконечен или не существует, то — **расходится**.

Отметим, что обозначение несобственного интеграла от неограниченной функции f по промежутку $[a, b)$ и обозначение определенного интеграла от интегрируемой функции f на отрезке $[a,\ b]$ совпадают. Однако противоречия в обозначениях не возникает по следующей причине. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, функция $\Phi(\eta)$ непрерывна на этом отрезке (см. теорему 1 из §8). Поэтому ее предел при $\eta \to b-$ равен $\Phi(b)$, а значит, на отрезке $[a,\ b]$ несобственный интеграл от f совпадает с определенным интегралом от f.

В случае $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,\ b)$ сходящийся несобственный интеграл от $f(x)$ по $[a, b)$ геометрически соответствует площади бесконечно высокой криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a,\ b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x)$, причем прямая $x = b$ является вертикальной асимптотой этого графика (рис. 11).

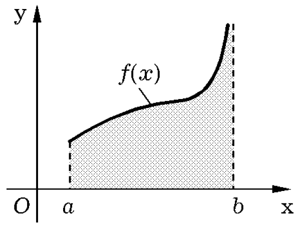

Рис. 11

Пример 5. Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^s}$ сходится при $s < 1$ и расходится при $s \geqslant 1$.

Аналогично определяются несобственные интегралы от функции $f(x)$, неограниченной при $x \to a+$ или при $x \to c \in (a,\ b)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\xi \to a+} \int_\xi^b f(x)\,dx, \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

В общем случае, когда точек, в окрестности которых функция $f(x)$ не ограничена, несколько и (или) промежуток интегрирования бесконечен, область интегрирования разбивается на такие участки, которые содержат только одну такую точку или $+\infty$, или $-\infty$. При этом по определению считают, что несобственный интеграл по всему промежутку сходится, если независимо один от другого сходятся интегралы по каждому участку. Точки области интегрирования, при стремлении к которым подынтегральная функция не ограничена, или $+\infty$, или $-\infty$ будем называть **особенностями несобственного интеграла**.

Несобственный интеграл от неограниченной функции следующим образом сводится к несобственному интегралу по бесконечному промежутку:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to b-}\int_a^\eta f(x)\,dx = \left|\; x = b - \frac{1}{z},\ dx = \frac{1}{z^2}dz,\ z = \frac{1}{b-x} \;\right| =$$

$$= \lim_{\eta\to b-}\int_{1/(b-a)}^{1/(b-\eta)} \frac{f(b-1/z)\,dz}{z^2} = \left|\; g(z) = \frac{f(b-1/z)}{z^2},\ c = \frac{1}{b-a} \;\right| = \int_c^{+\infty} g(z)\,dz.$$

Дайте **геометрическую интерпретацию** данных преобразований.

Вывод: любое утверждение о несобственном интеграле 1 рода имеет аналог для несобственного интеграла 2 рода. Далее будем рассматривать только несобственные интегралы 1 рода.

13.3 Свойства несобственных интегралов

Свойства несобственного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла. Однако не все свойства определенного интеграла имеют аналоги для несобственных интегралов. Например, произведение двух функций, интегрируемых на некотором отрезке, также интегрируемо на этом отрезке: $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b] \implies fg \in \mathcal{R}[a,b]$. Но по промежутку $(0,\,1]$ несобственный интеграл от произведения функций $f(x)g(x) = 1/x$ расходится, тогда как от каждого из сомножителей $f(x) = g(x) = 1/\sqrt{x}$ несобственные интегралы по этому промежутку сходятся.

Теорема 1 (**свойства несобственных интегралов**). а) Пусть сходятся несобственные интегралы от функций f и g по бесконечному промежутку $[a,+\infty)$, а $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Тогда несобственный интеграл от функции $\lambda f + \mu g$ по промежутку $[a,+\infty)$ также сходится и

$$\int_a^{+\infty}(\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda\int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \quad (\textbf{линейность}).$$

б) Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом конечном отрезке $[a,b] \subset [a,+\infty)$, а $c > a$. Тогда несобственные интегралы от функции f по промежуткам $[a,+\infty)$ и $[c,+\infty)$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. И в случае их сходимости верно равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad (\textbf{аддитивность}).$$

в) Если функция $f(x)$ непрерывна на бесконечном полуинтервале $[a,+\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема и строго монотонна на полуинтервале $[\alpha,\,\beta)$ (возможно $\beta = +\infty$), причем $\varphi(\alpha) = a$, и $\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to \beta-$, то справедливо равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt \quad (\textbf{замена переменной}).$$

г) Если функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a, +\infty)$, а $F(x)$ — одна из ее первообразных на этом полуинтервале, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty} \quad \text{(}\textbf{формула Ньютона — Лейбница}\text{)}.$$

д) Если $f, g \in C^1[a, +\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}(fg)(x)$, то несобственные интегралы от функций fg' и $f'g$ по промежутку $[a, +\infty)$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. В случае их сходимости верно равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = (fg)(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx \quad \text{(}\textbf{интегрирование по частям}\text{)}.$$

Док–во следует из определений и соответствующих свойств определенного интеграла (см. [З: стр. 390]). Докажите б). ▷

Задача 1. Выведите сформулированное выше утверждение 1 из утверждения б) этой теоремы.

Вычисление несобственного интеграла основано на его определении и теореме 1.

14 Признаки сходимости несобственных интегралов

См. [ЗИК: §7.3, 7.6, 7.8], [З: гл. 6, §5].

Перед интегрированием функции по бесконечному промежутку целесообразно предварительно убедиться, во–первых, в том, что она интегрируема на любом отрезке, включенном в этот промежуток, и, во–вторых, что соответствующий несобственный интеграл от данной функции является сходящимся. Рассмотрим некоторые признаки, которые позволяют установить сходимость или расходимость несобственного интеграла по бесконечному промежутку.

14.1 Признаки сравнения

Теорема 1 (признак сравнения 1). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом конечном отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$, причем $\exists c > a\ \forall x \in [\mathrm{c}, +\infty)\ \ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда если сходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а если расходится несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Док–во. Пусть сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, тогда из свойства аддитивности несобственных интегралов (см. утверждение б теоремы 1 из §13) сходится интеграл $\int_{\mathrm{c}}^{+\infty} g(x)\,dx$. В силу определения это означает, что существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_c^b g(x)\,dx = M.$$

Поскольку по условию теоремы $g(x) \geqslant 0\ \forall x \in [c, +\infty)$, то

$$\forall d \in [c, +\infty) \quad \int_d^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_d^b g(x)\,dx \geqslant 0$$

как предел от неотрицательной функции. Еще раз используя свойство аддитивности, получаем

$$\forall d \in [c, +\infty) \quad \int_c^d g(x)\,dx = \int_c^{+\infty} g(x)\,dx - \int_d^{+\infty} g(x)\,dx \leqslant M.$$

В соответствии с условием теоремы и свойством монотонности определенного интеграла

$$\forall b \in [c, +\infty) \quad 0 \leqslant \int_c^b f(x)\,dx \leqslant \int_c^b g(x)\,dx \leqslant M.$$

Так как $f(x) \geqslant 0\ \ \forall x \in [c, +\infty)$, то функция $\Phi(b) = \int_c^b f(x)\,dx$ монотонно возрастает и ограничена сверху значением M. Следовательно, такая функция имеет предел, причем

$$\lim_{b\to+\infty} \Phi(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)\,dx \leqslant M,$$

что означает сходимость несобственного интеграла $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$, а значит, и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (см. опять же утверждение б теоремы 1 из §13).

Второе утверждение теоремы докажем от противного. Предположим, что интеграл от функции $g(x)$ сходится. Но тогда, как только что было доказано, сходится и интеграл от функции $f(x)$, что противоречит условию теоремы. ▷

Геометрическая интерпретация: если сходится интеграл от большей функции, то сходится и интеграл от меньшей функции; если же расходится интеграл от меньшей функции, то расходится и интеграл от большей функции (рис. 12).

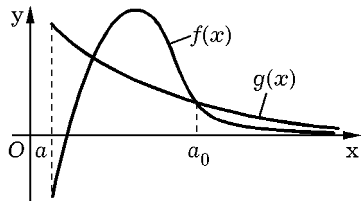

Рис. 12

Теорема 2 (предельный признак сравнения). Пусть $f,\ g \in \mathcal{R}[a,b]\ \forall b[a,+\infty)$, функция $f(x)$ неотрицательна, а $g(x)$ положительна при $x \geqslant c$ для некоторого $c \geqslant a$. Если существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0,$$

то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Док–во. В силу определения предела функции для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $d > c$, что справедливо неравенство

$$(\lambda - \varepsilon)g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon)g(x) \qquad \forall x > d. \tag{1}$$

Выберем ε так, чтобы было выполнено условие $\lambda - \varepsilon > 0$. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, то в силу линейности (см. теорему 1 из §13 утверждение а) сходится и интеграл $\int_a^{+\infty}(\lambda + \varepsilon)g(x)\,dx$, а тогда, согласно (1) и теореме 1 будет сходиться и интеграл от $f(x)$.

Если же сходится интеграл от $f(x)$, то в силу (1) и теоремы 1 сходится и интеграл от $(\lambda - \varepsilon)g(x)$, а тогда, согласно линейности будет сходиться и интеграл от $g(x)$. $\triangleright$

Задача 1. Используя предельный признак сравнения, исследуйте на сходимость интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[3]{x^7 - 3x - 2}}.$$

14.2 Абсолютная и условная сходимость

Признаки сравнения, рассмотренные в предыдущем пункте, применимы только к несобственным интегралам от знакопостоянных функций, т.е. от функций, которые неотрицательны или неположительны в некоторой окрестности особенности интеграла. Выясним, как ведут себя несобственные интегралы от функций, принимающих в любой окрестности особенности интеграла значения разных знаков.

Напомним прежде всего, что по теореме об оценке модуля интеграла, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ее модуль $|f(x)|$ есть также интегрируемая функция на отрезке $[a, b]$. Поэтому можно рассматривать два несобственных интеграла по бесконечному промежутку:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Во втором из этих интегралов подынтегральная функция неотрицательна, и поэтому к нему применимы признаки сравнения. Это позволяет в некоторых случаях доказывать сходимость и первого из указанных несобственных интегралов, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,\, b] \subset [a,\, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Док–во. Для всех $x \in [a,\, +\infty)$ справедливо неравенство

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|, \quad \text{азначит}, \qquad 0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2|f(x)|.$$

Так как по условию теоремы интеграл от функции $|f(x)|$ по бесконечному промежутку $[a,\, +\infty)$ сходится, то в силу линейности сходящегося несобственного интеграла (см. теорему 1 из §13 утверждение а) сходится и интеграл по этому же промежутку от функции $2|f(x)|$, а тогда, согласно теореме 1, сходится и интеграл от функции $f(x)+|f(x)|$. На основании свойства линейности запишем

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{+\infty} \big(f(x)+|f(x)|\big)\,dx - \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Поскольку сходятся интегралы в правой части этого равенства, то сходится и интеграл в его левой части. $\triangleright$

Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, сходится, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, **сходится абсолютно**. Если расходится первый интеграл и сходится второй интеграл, то говорят, что он **сходится условно**.

Пример 2 (**условно сходящийся интеграл**). Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \quad \text{по частям} \quad = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

сходится, т.к. $\dfrac{|\cos x|}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$, по признаку сравнения 1 и теоремы 3 сходится интеграл, стоящий справа. Аналогично доказывается сходимость интеграла $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$. Поэтому интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\,dx$$

расходится, так как он равен разности расходящегося и сходящегося интегралов. А поскольку $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$, то по признаку сравнения 1 расходится $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$.