Дифференциально-геометрические методы теории управления

Четвериков В.Н.

Лекции для бакалавров ФН-12, 7 семестр

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВНЕШНИЕ ФОРМЫ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

См. §32 и §33 в [1] и гл.10 в [2].

1.1. Ковекторное пространство

Будем обозначать через $\mathcal{L}^n$ произвольное n-мерное линейное пространство, а через $\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное линейное пространство. Векторы линейного пространства будем обозначать через $\vec{x}, \vec{y}, \ldots$.

Отображение $f\colon \mathcal{L}^n \to \mathbb{R}$, которое определено на линейном пространстве $\mathcal{L}^n$ и принимает действительные значения, называют *ковектором* (также *линейной функцией*, *линейной формой*, *линейным функционалом*), если оно удовлетворяет двум условиям:

а) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}^n$;

б) $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathcal{L}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}$.

Ковекторы можно складывать и умножать на действительные числа согласно правилам:

$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}), \qquad (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}).$$

Введенные таким способом операции превращают множество ковекторов в пространстве $\mathcal{L}^n$ в линейное пространство. Это линейное пространство называют *сопряженным* (или *ковекторным*) *пространством* по отношению к линейному пространству $\mathcal{L}^n$ и обозначают $(\mathcal{L}^n)^*$.

Пусть $\mathcal{L}_0$ — подпространство в $\mathcal{L}^n$, f — ковектор. Будем говорить, что ковектор f *биортогонален* подпространству $\mathcal{L}_0$, если f отображает $\mathcal{L}_0$ в нуль, т.е. $f(\vec{x}) = 0$ для любого вектора $\vec{x}$ из $\mathcal{L}_0$.

Задача 1.1 Докажите, что множество всех ковекторов, биортогональных подпространству $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}^n$, есть линейное пространство размерности $k = n - \dim \mathcal{L}_0$.

Опираясь на базис $e = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, выбранный в пространстве $\mathcal{L}^n$, построим базис в сопряженном пространстве $(\mathcal{L}^n)^*$. Для каждого вектора $\vec{e}_i$ из базиса e рассмотрим ковектор f^i, для которого $f^i(\vec{e}_i) = 1$ и $f^i(\vec{e}_j) = 0$ для всех векторов $\vec{e}_j$, кроме $\vec{e}_i$. Так как в виду линейности ковектор определяется своими значениями на базисных векторах, получаем систему ковекторов $f^1, \ldots, f^n \in (\mathcal{L}^n)^*$.

Теорема 1.1. Набор ковекторов $(f^1, \ldots, f^n)$, определенных выше, является базисом в сопряженном пространстве $(\mathcal{L}^n)^*$.

Базисы $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ и $(f^1, \ldots, f^n)$ линейного пространства $\mathcal{L}^n$ и сопряженного пространства $(\mathcal{L}^n)^*$ называют *биортогональными* (*дуальными* или *взаимными*), если

$$f^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j = \begin{cases} 0, \ i \neq j; \\ 1, \ i = j. \end{cases}$$

1.2. Полилинейные формы и p-формы

Функцию φ от p векторов со значением в $\mathbb{R}$ называют *полилинейной формой типа* $(p, 0)$, если она линейна по каждому отдельно взятому аргументу.

Полилинейную форму $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p) = \varphi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$, полученную из полилинейной формы φ перестановкой двух первых аргументов, называют *транспонированной* к полилинейной форме φ. Транспонированными называют также полилинейные формы, полученные перестановкой любой другой пары аргументов.

Полилинейную форму типа $(p, 0)$ называют *p-формой* (также *внешней формой степени p, ковариантным кососимметрическим тензором типа* $(p, 0)$) в $\mathcal{L}^n$, если при перестановке любой пары аргументов она меняет знак. При $p = 1$ 1-форма совпадает с ковектором.

Пример 1.1. Ориентированный объем параллелепипеда с ребрами $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n$ в ориентированном евклидовом пространстве $\mathcal{L}^n$ (см. [2]) есть n-форма

$$V(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_n) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \ldots & \xi_{nn} \end{vmatrix},$$

где $\vec{\xi}_i = \xi_{i1}\vec{e}_1 + \ldots + \xi_{in}\vec{e}_n,\ i = 1, \ldots, n$, а $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — ортонормированный базис, задающий ориентацию $\mathcal{L}^n$.

Пример 1.2. Ориентированная площадь проекции параллелограмма со сторонами $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ на плоскость xOy есть 2-форма.

Задача 1.2 Докажите, что для всякой 2-формы ω в $\mathcal{L}^n$ имеем

$$\omega(\vec{x}, \vec{x}) = 0, \qquad \forall \vec{x} \in \mathcal{L}^n.$$

Задача 1.3 Докажите, что при $p > n$ всякая p-форма в $\mathcal{L}^n$ равна нулю.

Определим операцию, которая позволяет из данной полилинейной формы φ типа $(p, 0)$ получить p-форму. Пусть $\sigma = (i_1, \ldots, i_p)$ перестановка из p элементов. Обозначим через $|\sigma|$ количество инверсий в перестановке σ (см. [5, §4.5]), а через φ_σ полилинейную форму, получаемую из φ соответствующей перестановкой ее аргументов. В частности, исходной полилинейной форме соответствует тождественная перестановка $(1, \ldots, p)$. Рассмотрим сумму

$$\varphi^{\mathrm{alt}} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \varphi_\sigma, \tag{1.1}$$

которая берется по всем перестановкам σ из p элементов. Операцию преобразования $\varphi \longmapsto \varphi^{\mathrm{alt}}$ называют *альтернированием.* В результате альтернирования из полилинейной формы получается p-форма. Действительно, перестановка двух индексов меняет четность каждой перестановки σ в сумме (1.1). Значит, каждое слагаемое и вся сумма в целом меняют знак.

Полилинейные формы можно складывать и умножать на действительные числа по обычным правилам для функций:

$$(\varphi + \psi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) = \varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) + \psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$$
$$(\lambda\varphi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) = \lambda \cdot \varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p).$$

Задача 1.4 Докажите, что множество $\wedge^p(\mathcal{L}^n)^*$ всех p-форм в $\mathcal{L}^n$ замкнуто относительно указанных операций сложения и умножения на число и является линейным пространством. Покажите, что размерность этого пространства равна C_n^p при $p \leq n$ и 0 при $p > n$.

1.3. Внешнее произведение

Две полилинейные формы можно перемножить, образуя функцию от большего числа переменных. Например, из полилинейных форм $\varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ и $\psi(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_r)$ типов $(p, 0)$ и $(r, 0)$ можно образовать новую полилинейную форму

$$\chi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_r) = \varphi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \cdot \psi(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_r),$$

имеющую тип $(p+r, 0)$. При этом полилинейную форму χ называют *тензорным произведением полилинейных форм* φ и ψ

Тензорное произведение p-формы φ и r-формы ψ может не являться внешней формой. Чтобы получить кососимметрический тензор, нужно выполнить операцию альтернирования. В результате получится внешняя форма степени $p + r$, которую обозначают $\varphi \wedge \psi$ и называют *внешним произведением* φ и ψ. По определению,

$$(\varphi \wedge \psi)(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_{p+r}) = \frac{1}{(p+r)!} \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \varphi(\vec{x}_{\sigma_1}, \ldots, \vec{x}_{\sigma_p}) \cdot \psi(\vec{x}_{\sigma_{p+1}}, \ldots, \vec{x}_{\sigma_{p+r}}).$$

Определение внешнего произведения p-формы φ и r-формы ψ применимо и к случаю $p = 0$. Тогда φ — это число, а $\varphi \wedge \psi$ — умножение r-формы ψ на число φ, т.е. $\varphi \wedge \psi = \varphi \cdot \psi$. Аналогично для $r = 0$.

Теорема 1.2. Внешнее произведение обладает следующими свойствами:

1) $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi = \varphi \wedge (\psi \wedge \chi)$ (ассоциативность),
2) $\psi \wedge \varphi = (-1)^{pr} \varphi \wedge \psi$ (кососоммутативность),
3) $(\lambda\varphi + \lambda_1\varphi_1) \wedge \psi = \lambda\varphi \wedge \psi + \lambda_1\varphi_1 \wedge \psi$ (линейность),

где $\varphi, \varphi_1, \psi, \chi$ — произвольные внешние формы в $\mathcal{L}^n$ степени p, p, r и s соответсвенно, λ, λ_1 — произвольные числа.

Док–во следует из определений и свойств перестановок. $\triangleright$

Задача 1.5 Пусть φ — p-форма в $\mathcal{L}^n$. Покажите, что $\varphi \wedge \varphi = 0$, если p нечетно или $2p > n$. Найдите такую 2-форму φ в $\mathbb{R}^4$, что $\varphi \wedge \varphi \neq 0$.

Задача 1.6 Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — 1-формы в $\mathcal{L}^n$ $(p \leq n)$, $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p \in \mathcal{L}^n$. Покажите, что

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p) = \frac{1}{p!} \begin{vmatrix} \omega_1(\vec{\xi}_1) & \ldots & \omega_p(\vec{\xi}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_1(\vec{\xi}_p) & \ldots & \omega_p(\vec{\xi}_p) \end{vmatrix}.$$

Т.е. значение внешнего произведения 1-форм на параллелепипеде $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p$ равно ориентированному объему образа параллелепипеда в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$ при отображении $\vec{\xi} \longmapsto \big(\omega_1(\vec{\xi}), \ldots, \omega_p(\vec{\xi})\big)$ из $\mathcal{L}^n$ в $\mathbb{R}^p$.

Задача 1.7 Докажите, что 1-формы $\omega_1, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p = 0$.

Теорема 1.3. Пусть $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ — какой–либо базис линейного пространства $\mathcal{L}^n$, а $f = (f^1, \ldots, f^n)$ — биортогональный ему базис сопряженного пространства $(\mathcal{L}^n)^*$. Тогда p-формы $(p \leq n)$

$$f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}, \qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n,$$

образуют базис линейного пространства $\wedge^p(\mathcal{L}^n)^*$. При этом каждая p-форма ω в $\mathcal{L}^n$ однозначно представляется в виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p} f^{i_1} \wedge \ldots \wedge f^{i_p}, \tag{1.2}$$

где $a_{i_1 \ldots i_p} = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})$.

Док–во следует из определений. $\triangleright$

Базис пространства $\wedge^p(\mathcal{L}^n)^*$ из теоремы 1.3 будем называть *каноническим базисом*, порожденным базисом f.

Задача 1.8 Пусть $(f^1, \ldots, f^n)$ — какой–либо базис сопряженного пространства $(\mathbb{R}^n)^*$. Докажите, что всякая n-форма ω в $\mathbb{R}^n$ есть либо ориентированный объем параллелепипеда при некотором выборе единицы объема (см. пример 1.1), либо нуль, т.е.

$$\omega = a \cdot f^1 \wedge \ldots \wedge f^n. \tag{1.3}$$

1.4. Внутреннее произведение и отображение p-форм

Теорема 1.4. Пусть $\vec{\xi} \in \mathcal{L}^n$, ω — внешняя форма степени p в $\mathcal{L}^n$. Отображение, которое набору векторов $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_{p-1} \in \mathcal{L}^n$ ставит в соответствие число $\omega(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_{p-1})$, является внешней формой степени $p-1$ в $\mathcal{L}^n$.

Док–во следует из определений. $\triangleright$

Внешнюю форму степени $p-1$ из теоремы 1.4 обозначают $\vec{\xi}\rfloor\omega$ (или $i_{\vec{\xi}}(\omega)$). По определению,

$$(\vec{\xi}\rfloor\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_{p-1}) = \omega(\vec{\xi}, \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_{p-1}).$$

Операцию, которая вектору $\vec{\xi}$ и p-форме ω ставит в соответствие $(p-1)$-форму $\vec{\xi}\rfloor\omega$ $(= i_{\vec{\xi}}(\omega))$ называют *внутренним произведением* вектора $\vec{\xi}$ и p-формы ω.

Исследуем как отображаются внешние формы. Пусть $F\colon \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^n$ — линейное отображение, ω — p-форма в $\mathcal{L}^n$. Тогда в $\mathcal{L}^k$ возникает p-форма $F^*\omega$, значение которой на p векторах $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p \in \mathcal{L}^k$ равно значению ω на их образах:

$$(F^*\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p) = \omega(F\vec{\xi}_1, \ldots, F\vec{\xi}_p).$$

Задача 1.9 Проверьте, что $F^*\omega$ — p-форма.

Теорема 1.5. Пусть $F\colon \mathcal{L}^k \to \mathcal{L}^n$ — линейное отображение, $p > 0$. Тогда

1) F^* — линейное отображение из пространства $\wedge^p(\mathcal{L}^n)^*$ p-форм в $\mathcal{L}^n$ в пространство $\wedge^p(\mathcal{L}^k)^*$ p-форм в $\mathcal{L}^k$ (звездочка сверху указывает, что F^* действует в сторону, противоположную F);

2) если $G\colon \mathcal{L}^n \to \mathcal{L}^m$ — второе линейное отображение, то $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$;

3) F^* сохраняет внешнее умножение: $F^*(\varphi \wedge \psi) = F^*\varphi \wedge F^*\psi$.

Док–во следует из определений. $\triangleright$

2. КАСАТЕЛЬНОЕ РАССЛОЕНИЕ

2.1. Многообразия и их отображения

Определение гладкого многообразия см., например, в [3, §11.1]. Для понимания дальнейшего достаточно знать, что каждая точка многообразия M имеет окрестность, в которой задана система координат. Систему координат в окрестности U можно трактовать как биективное непрерывное отображение h из U в область пространства $\mathbb{R}^n$. При этом коориматами точки $P \in M$ называют набор чисел $(x_1, \dots, x_n) = h(P) \in \mathbb{R}^n$. Пару (U, h) называют также *картой* многообразия M. Если в окрестности V точки $P \in M$ определена другая система координат (V, k), то карты (U, h) и (V, k) должны быть *согласованными*, т.е. взаимно обратные функции многих переменных $k \circ h^{-1}$ и $h \circ k^{-1}$ должны быть гладкими. Под *гладкостью* здесь и далее понимается бесконечная дифференцируемость.

Все дальнейшие наши рассуждения касаются локальных свойств геометрических объектов, т.е. справедливых только в некоторой окрестности многообразия. Поэтому везде далее под многообразием можно понимать область вещественного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть M и N — гладкие многообразия и $F\colon M \to N$ — некоторое отображение. Предположим $(x_1, \dots, x_n)$ — система координат в окрестности U точки $P \in M$, $(y_1, \dots, y_m)$ — система координат в окрестности V точки $Q = F(P) \in N$, и $F(U) \subseteq V$. Тогда координатам точки из окрестности U ставится в соответствие координаты ее образа при отображении F. А значит, отображение F в рассматриваемых системах координат задается набором функций

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \quad \dots, \quad y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

или векторной функцией $f = (f_1, \dots, f_m)$. Если эта векторная функция является гладкой (бесконечно дифференцируемой) функцией многих переменных, то отображение F называют *гладким отображением в окрестности точки* P. Отображение F называют *гладким*, если оно является гладким в окрестности каждой точки многообразия M.

Теорема 2.1. Композиция гладких отображений многообразий есть гладкое отображение многообразий.

Док–во следует из теоремы о дифференцируемости сложной функции. $\triangleright$

Диффеоморфизмом многообразия M на многообразие N называют биективное гладкое отображение M на N, обратное к которому также является гладким. Многообразия M и N, для которых существует диффеоморфизм M на N, называют *диффеоморфными.*

Гладкой функцией на многообразии M называют гладкое отображение из M в $\mathbb{R}$. Множество гладких функций на M будем обозначать через $C^\infty(M)$. Операции сложения и умножения гладких функций дают вновь гладкие функции. Постоянные функции являются гладкими. Умножение функции $f \in C^\infty(M)$ на постоянную функцию $g(x) \equiv c$ можно интерпретировать как умножение функции на действительное число c. Таким образом, на $C^\infty(M)$ определены три операции: сложение, умножение и умножение на действительное число. Алгебраическая структура $\mathcal{L}$ с операциями сложения, умножения и умножения на действительное число называют $\mathbb{R}$-*алгеброй*, если 1) $\mathcal{L}$ относительно сложения и умножения на число есть линейное пространство; 2) операция умножения ассоциативна, коммутативна, дистрибутивна относительно сложения и обладает единицей. Легко проверить, что множество $C^\infty(M)$ является $\mathbb{R}$-алгеброй.

Далее мы будем использовать в основном алгебраический подход к дифференциальной геометрии, в основе которого лежит замена многообразия M $\mathbb{R}$-алгеброй $C^\infty(M)$.

Отображение ν $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}$-алгебру $\mathcal{L}$ называют *гомоморфизмом* $\mathbb{R}$*-алгебр*, если это отображение является *линейным оператором* и, кроме того, удовлетворяет дополнительному условию

$$\nu(ab) = \nu(a)\nu(b).$$

Гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебры $\mathcal{K}$ в $\mathbb{R}$-алгебру $\mathcal{L}$, являющийся биекцией, называют *изоморфизмом* $\mathbb{R}$*-алгебр.*

Теорема 2.2. Если $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий M и N, то отображение $F^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, определенное формулой $F^*(g) = g \circ F$, есть гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $C^\infty(N)$ и $C^\infty(M)$.

Док–во следует из определений гладкого отображения и гомоморфизма $\mathbb{R}$-алгебр, а также из теоремы 2.1. $\triangleright$

Отображение F^* множества гладких функций на многообразии N в множество гладких функций на многообразии M, порождаемое гладким отображением $F\colon M \to N$, называют *индуцированным отображением.*

2.2. Касательные векторы

Используют три подхода (координатный, геометрический и алгебраический) к определению касательного вектора к многообразию, приводящих к одному и тому же понятию. Каждый подход отражает одну из сторон этого понятия и более предпочтителен в определенной ситуации. Для определения выбирают один из подходов, а два других формулируют как разные интерпретации этого понятия. В качестве определения мы выберем координатный подход, мотивировка его следующая.

Гладкой параметризованной кривой на многообразии M (или *гладким путем на многообразии* M) называют *гладкое инъективное отображение* $\gamma\colon (t_1, t_2) \to M$ некоторого интервала $(t_1,\, t_2)$ числовой оси в это многообразие. Образ такого отображения называют *гладкой кривой на многообразии* M.

В системе координат $x_1, \ldots, x_n$ на M, которая задана отображением h из окрестности $U \subset M$ в $\mathbb{R}^n$, гладкая кривая γ задается векторной функцией $(h \circ \gamma)(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ и представляет собой гладкую параметризованную кривую в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для такой кривой определяется касательная в точке, соответствующей точке $P \in M$ на кривой. Вектор с координатами $\xi_1 = x_1'(t_0), \ldots, \xi_n = x_n'(t_0)$ есть направляющий вектор касательной к кривой γ (здесь t_0 — значение параметра, соответсвующего точке P, т.е. $\gamma(t_0) = P$). В другой системе координат $y_1, \ldots, y_n$ направляющий вектор той же касательной в соответствующей точке имеет координаты $\eta_1 = y_1'(t_0), \ldots, \eta_n = y_n'(t_0)$. Из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)\xi_j, \quad i = \overline{1,\, n}, \tag{2.1}$$

где $x_1^0, \ldots, x_n^0$ — координаты точки P в системе координат $x_1, \ldots, x_n$. Итак, координаты направляющих векторов одной и той же касательной в разных системах координат связаны соотношением (2.1). Это свойство лежит в основе *координатного подхода* к понятию касательного вектора.

Касательным вектором в точке $P \in M$ к n-мерному многообразию M называют соответствие, которое каждой системе координат в окрестности точки P сопоставляет упорядоченный набор из n чисел. При этом если системе координат $x_1, \ldots, x_n$ поставлен в соответствие набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, а системе координат $y_1, \ldots, y_n$ — набор чисел $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, то выполняются соотношения (2.1). При этом точку P называют *точкой приложения касательного вектора*, а набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — *координатами касательного вектора* в системе координат $x_1, \ldots, x_n$. Касательные векторы будем обозначать греческими буквами с надстрочным знаком "стрелка", например $\vec{\xi}$.

Теорема 2.3. Любой касательный вектор к многообразию M в точке P является касательным вектором к некоторой параметризованной кривой на M в точке P.

Док–во см. в [3, §11.4, теорема 11.6]. $\triangleright$

Две гладкие параметризованные кривые $\gamma_1\colon (a_1, b_1) \to M$ и $\gamma_2\colon (a_2, b_2) \to M$, проходящие через точку $P = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, назовем *соприкасающимися кривыми*, если в какой-либо системе координат (U, h) в окрестности точки P выполнено соотношение

$$\left|(h\circ\gamma_1)(t_1+\Delta t)-(h\circ\gamma_2)(t_2+\Delta t)\right|=o(\Delta t) \quad \text{при} \quad \Delta t\to 0. \tag{2.2}$$

Теорема 2.4. Две гладкие параметризованные кривые γ_1 и γ_2 на многообразии M, проходящие через точку P, соприкасаются в этой точке тогда и только тогда, когда касательные векторы к кривым γ_1 и γ_2 в точке P совпадают.

Док–во см. в [3, §11.4, теорема 11.7]. $\triangleright$

Множество всех гладких параметризованных кривых на многообразии M, проходящих через точку P, распадается на не пересекающиеся классы попарно соприкасающихся кривых. Параметризованные кривые из одного класса имеют один и тот же касательный вектор, в то время как параметризованные кривые разных классов не являются соприкасающимися и имеют разные касательные векторы. Касательные векторы к многообразию в точке P оказались во взаимно однозначном соответствии с классами соприкасающихся кривых. Поэтому их можно отождествить. Итак, касательные векторы к многообразию M в точке P и классы параметризованных кривых, соприкасающихся в точке P, — одно и то же. Интерпретация касательного вектора как класса соприкасающихся кривых составляет суть *геометрического подхода* к определению касательного вектора.

Пусть в системе координат $x_1, \ldots, x_n$ на многообразии M касательный вектор $\vec{\xi}$ в точке $P = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеет координаты $a_1, \ldots, a_n$. Гладкую функцию $f \in C^\infty(M)$ в этой системе координат можно записать как функцию многих переменных: $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число

$$\vec{\xi}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0). \tag{2.3}$$

не зависит от выбора системы координат.

Задача 2.1 Докажите это двумя способами:

1) используя правило дифференцирования сложной функции, т.е. используя координатный подход;

2) используя геометрический подход к понятию касательного вектора. А именно, докажите, что если $\vec{\xi}$ — касательный вектор к параметризованной кривой $\gamma(t)$ в точке $P = \gamma(t_0)$, то $\vec{\xi}(f) = (f \circ \gamma)'(t_0)$.

Число $\vec{\xi}(f)$ называют *производной функции f вдоль вектора $\vec{\xi}$*. Операцию вычисления этой производной называют *дифференцированием функции f вдоль вектора $\vec{\xi}$*.

Далее касательные векторы будем записывать в виде

$$\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_P, \tag{2.4}$$

отождествляя вектор с дифференцированием вдоль него.

Задача 2.2 Докажите следующие свойства операции дифференцирования функций на многообразии M вдоль касательного вектора $\vec{\xi}$ в точке P:

1) $\vec{\xi}(\lambda f + \mu g) = \lambda\vec{\xi}(f) + \mu\vec{\xi}(g), \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}, \quad f,\, g \in C^\infty(M)$;

2) $\vec{\xi}(fg) = f(P)\vec{\xi}(g) + \vec{\xi}(f)g(P), \quad f,\, g \in C^\infty(M)$.

Операцию $\vec{\xi}\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, обладающую свойствами из задачи 2.2, называют *дифференцированием функций в точке P*.

Отождествление касательного вектора с дифференцированием вдоль него реализует *алгебраический подход* к понятию касательного вектора. Для вычисления координат касательного вектора, заданного дифференцированием функций в точке, достаточно продифференцировать координатные функции соответсвующей карты.

2.3. Касательное пространство

Множество всех касательных векторов к n-мерному многообразию M в точке P обозначают $T_P M$.

Теорема 2.5. Пусть $\vec{\xi}, \vec{\eta} \in T_P M$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
1) В $T_P M$ существует единственный вектор, который обозначается $\vec{\xi}+\vec{\eta}$, удовлетворяющий условию

$$(\vec{\xi} + \vec{\eta})(f) = \vec{\xi}(f) + \vec{\eta}(f), \quad f \in C^\infty(M),$$

2) В $T_P M$ существует единственный вектор, который обозначается $\lambda\vec{\xi}$, удовлетворяющий условию

$$(\lambda\vec{\xi})(f) = \lambda\,\vec{\xi}(f), \quad f \in C^\infty(M).$$

3) Относительно введенных операций $T_P M$ является n-мерным линейным пространством.

Док–во см. в [3, §11.5]. ▷

Линейное пространство $T_P M$ называют *касательным пространством к многообразию M в точке P*.

Задача 2.3 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в окрестности точки P на многообразии M. Покажите, что векторы

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_P, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_P$$

образуют базис касательного пространства $T_P M$. Как в этом базисе выражаются координаты векторов $\vec{\xi} + \vec{\eta}$ и $\lambda\vec{\xi}$ через координаты векторов $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$ и число λ?

Теорема 2.6. Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразия M в многообразие N. Для любого вектора $\vec{\xi} \in T_P M$ существует единственный вектор $\vec{\eta}$ из $T_{F(P)}N$ такой, что
$$\vec{\eta}(f) = \vec{\xi}(f \circ F) \qquad \forall f \in C^\infty(N).$$

Док–во. Пусть касательный вектор $\vec{\xi} \in T_P M$ является касательным вектором к гладкой параметризованной кривой γ в точке $P = \gamma(t_0)$. Тогда
$$\vec{\xi}(f \circ F) = \big((f \circ F) \circ \gamma\big)'(t_0) = \big(f \circ (F \circ \gamma)\big)'(t_0)$$
(см. задачу 2.1), т.е. касательный вектор $\vec{\eta}$ является касательным вектором к параметризованной кривой $F \circ \gamma$ в точке $F(P)$. $\triangleright$

Вектор $\vec{\eta}$ обозначают через $dF_P\vec{\xi}$ (или $F_*(\vec{\xi})$). Отображение $dF_P\colon T_P M \to T_{F(P)}N$ называется *дифференциалом гладкого отображения* F (или *касательным отображением*) *в точке* P.

Задача 2.4 Докажите, что дифференциал гладкого отображени в точке является линейным оператором. Найдите матрицу этого оператора в заданных системах координат на M и N.

Понимая касательный вектор как линейную функцию на $\mathbb{R}$-*алгебре* гладких функций, можем утверждение теоремы 2.6 переписать в виде
$$dF_P\vec{\xi} = \vec{\xi} \circ F^*, \tag{2.5}$$
где F^* — индуцированное отображение, порожденное гладким отображением F. Формула (2.5) означает следующее. Чтобы найти производную функции $f \in C^\infty(N)$ вдоль образа $dF_P\vec{\xi}$ касательного вектора $\vec{\xi} \in T_P M$ при отображении dF_P — дифференциале гладкого отображения $F\colon M \to N$ — достаточно продифференцировать вдоль касательного вектора $\vec{\xi}$ образ функции f при индуцированном отображении F^*, переводящем функцию f в гладкую функцию на многообразии M.

Рассмотрим множество TM всех касательных векторов к многообразию M во всех его точках. Элемент TM понимают как пару $(P, \vec{\xi})$, где P — точка многообразия M, а $\vec{\xi}$ — касательный вектор к многообразию M в точке P. Определено естественное отображение $\tau\colon TM \to M$, которое пару $(P, \vec{\xi})$ отображает в точку P. Отображение τ называют *касательным расслоением* многообразия M.

Множество TM для n-мерного многообразия M рассматривают как гладкое многообразие размерности $2n$, вводя системы координат на TM следующим образом. Пусть в окрестности $U \subset M$ задана система координат. Рассмотрим объединение $TU = \cup_{P\in U} T_P M$ касательных пространств по всем точкам из U. Объединив координаты $x_1, \ldots, x_n$ точки $P \in U$ и координаты $a_1, \ldots, a_n$ касательного вектора $\vec{\xi}$ в этой точке, вычисленные в рассматриваемой системе координат на U, получим систему координат на TU. В этих координатах касательное расслоение имеет вид:
$$\tau(x_1, \ \ldots, x_n, a_1, \ \ldots, a_n) = (x_1, \ \ldots, x_n).$$

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение n-мерного многообразия M в m-мерное многообразие N. Тогда в каждой точке $P \in M$ определено отображение $dF_P\colon T_P M \to$

$T_Q N$, $Q = F(P)$. Следовательно, мы имеем отображение $dF\colon TM \to TN$ касательного расслоения TM в касательное расслоение TN. При этом коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_M} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_N} \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

где τ_M и τ_N — касательные расслоения многообразий M и N соответственно.

Задача 2.5 Докажите, что отображение dF является гладким отображением многообразий TM и TN. Найдите координатное представление для этого отображения.

3. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

3.1. Определение

Гладкие функции на многообразии мы научились дифференцировать вдоль касательных векторов. Чтобы дифференцировать функции во всех точках многообразия, мы должны в каждой точке многообразия задать касательный вектор. Так мы приходим к понятию векторного поля на многообразии.

Векторное поле X *на многообразии* M есть отображение, которое каждой точке P многообразия ставит в соответствие касательный вектор X_P с точкой приложения P.

Таким образом, векторное поле X на многообразии M есть отображение $X\colon M \to TM$. Условие, что точке P соответствует касательный вектор из T_PM, можно записать с помощью касательного расслоения $\tau\colon TM \to M$ в виде $\tau \circ X = \mathrm{id}_M$, где id_M — тождественное отображение многообразия M.

Из координатного представления (2.4) касательных векторов получаем следующее координатное представление векторного поля:

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{3.1}$$

где $a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = \overline{1, n}$, — функции на многообразии M, значение которых в точке P равны координатам касательного вектора X_P в данной системе координат. Функции a_1, …, a_n называют *координатными функциями векторного поля* X в данной системе координат.

Координатные функции векторного поля зависят от выбора системы координат. Но если они гладкие в одной системе координат, то они будут гладкими в любой другой системе координат. *Гладким* называют векторное поле, координатные функции которого гладкие хотя бы в одной системе координат. Мы будем рассматривать только гладкие векторные поля. Множество всех гладких векторных полей на многообразии M будем обозначать через $\mathcal{D}(M)$.

Производная гладкой функции f на M вдоль векторов $X_P, P \in M$, определяет функцию $P \to X_P(f)$, которую называют *производной* (или *производной Ли*) *функции* f *вдоль векторного поля* X и обозначают $X(f)$ или $L_X f$.

Из формул (2.3), (2.4) и (3.1) следует представление

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n).$$

Поэтому если X — гладкое векторное поле, то $X(f)$ — гладкая функция.

Теорема 3.1. Производная функций вдоль векторного поля обладает свойствами:

1°. $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g), \quad \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}, \quad f,\, g \in C^\infty(M)$.

2°. $X(fg) = fX(g) + X(f)g, \quad f,\, g \in C^\infty(M)$.

Любое отображение $D\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, обладающее указанными свойствами, порождается некоторым гладким векторным полем X, т.е. функция $D(f)$ есть производная функции f вдоль векторного поля X.

Док–во см. в [3, §11.6, теорема 11.14].

Отображение $X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, обладающее свойствами 1° и 2° из теоремы 3.1, называют *дифференцированием* $\mathbb{R}$*–алгебры* $C^\infty(M)$. Согласно теореме 3.1, понятие гладкого векторного поля на многообразии и понятие дифференцирования $\mathbb{R}$–алгебры гладких функций на этом же многообразии можно отождествить.

На множестве $\mathcal{D}(M)$ всех гладких векторных полей на многообразии M можно ввести операции сложения векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию. *Суммой* $X+Y$ *векторных полей* X и Y называют векторное поле, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие касательный вектор $X_P + Y_P$, т.е. по определению

$$(X+Y)_P = X_P + Y_P.$$

Произведением fX *векторного поля* X *на гладкую функцию* f называют векторное поле, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие касательный вектор $f(P)X_P$, т.е. по определению

$$(fX)_P = f(P)\,X_P.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — $\mathbb{R}$-алгебра. Абелеву группу G называют *модулем* над $\mathbb{R}$-алгеброй $\mathcal{K}$ (или $\mathcal{K}$*–модулем*), если в G определена дополнительная операция, сопоставляющая каждой паре элементов $\alpha \in \mathcal{K}, x \in G$ некоторый элемент $\alpha x \in G$ и обладающая следующими свойствами:

1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;
2) $(\alpha+\beta)(x) = \alpha x + \beta x$;
3) $(\alpha\beta)(x) = \alpha(\beta x)$;
4) $1x = x$.

Поле $\mathbb{R}$ является $\mathbb{R}$-алгеброй, а любое линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ дает пример модуля над этой $\mathbb{R}$-алгеброй.

Задача 3.1 Покажите, что относительно введенных операций множество $\mathcal{D}(M)$ есть модуль над $\mathbb{R}$-алгеброй $C^\infty(M)$.

Важным отличием модуля от линейного пространства является отсутствие хорошего определения размерности и базиса модуля. В общей алгебре базисом модуля называют непустую систему его элементов, которая является линейно независимой и порождает модуль. Однако, например, модуль $C^\infty(\mathbb{R})$ имеет базис, состоящий из одной функции 1, и базис, состоящий из двух функций x и $x-1$, что неудобно. Далее под размерностью модуля G над $\mathbb{R}$-алгеброй $C^\infty(M)$ мы будем понимать целочисленную функцию на M, которая в точке $P \in M$ равна размерности пространства, составленного из ограничений в P элементов G.

3.2. Отображения векторных полей

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение, X — гладкое векторное поле на M. Для любой точки $P \in M$ касательный вектор $X_P \in T_PM$ касательным отображением dF_P преобразуется в касательный вектор $dF_P(X_P) \in T_{F(P)}N$ в точке $F(P)$ многообразия N. Естественно было бы рассматривать соответствие $F(P) \to dF_P(X_P)$ как векторное поле на многообразии N. Однако это не всегда возможно по двум причинам. Во–первых, возможна ситуация, когда две разные точки P_1 и P_2 при отображении F переходят в одну точку $Q \in N$, но при этом касательные векторы X_{P_1} и X_{P_2} отображением dF переводятся в разные касательные векторы к многообразию N в точке Q. В этой ситуации точке Q соответствует не один касательный вектор, а несколько. Во–вторых, отображение F может не быть сюръективным и тогда соответствие $F(P) \to dF_P(X_P)$ не будет определено на всем многообразии N.

Если для данного отображения $F\colon M \to N$ и данного векторного поля $X \in \mathcal{D}(M)$ две указанные трудности не возникают, т.е. отображение F сюръективно и из равенства $F(P) = F(P_1)$ следует равенство $dF_P(X_P) = dF_{P_1}(X_{P_1})$, то на многообразии N получаем такое векторное поле Y, что $Y_Q = dF_P(X_P)$ при $P \in F^{-1}(Q)$. В этом случае будем говорить, что F *отображает векторное поле* X *в векторное поле* Y и обозначать Y через $dF(X)$.

Теорема 3.2. Если сюръективное гладкое отображение $F\colon M \to N$ отображает векторное поле X в векторное поле $dF(X)$, то гомоморфизм $F^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ и дифференцирования вдоль векторных полей X, $dF(X)$ связаны соотношением

$$F^* \circ dF(X) = X \circ F^*.$$

Док–во. Пусть f — произвольная гладкая функция на многообразии N. Тогда для произвольной точки $P \in M$, используя формулы $Y(f)(Q) = Y_Q(f)$ и $dF(X)_{F(P)} = dF_P(X_P)$, следующие из определений, и теорему 2.6, получаем

$$\begin{aligned}\big(F^* \circ dF(X)\big)(f)(P) = F^*\big(dF(X)(f)\big)(P) = dF(X)(f)\big(F(P)\big) = dF(X)_{F(P)}(f) = \\ = dF_P(X_P)(f) = X_P(f \circ F) = (X \circ F^*)(f)(P).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функции $\big(F^* \circ dF(X)\big)(f)$ и $(X \circ F^*)(f)$ совпадают. Следовательно, на множестве всех гладких функций на многообразии N совпадают отображения $F^* \circ dF(X)$ и $X \circ F^*$. $\triangleright$

Соотношение из теоремы 3.2 означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} C^\infty(M) \arrow[d, "X"] & C^\infty(N) \arrow[l, "F^*"'] \arrow[d, "dF(X)"] \\ C^\infty(M) & C^\infty(N) \arrow[l, "F^*"] \end{tikzcd}$$

В частном случае, когда отображение F является *диффеоморфизмом*, из теоремы 3.2 следует

Теорема 3.3. Пусть $F\colon M \to N$ — диффеоморфизм. Тогда для любого гладкого векторного поля X на многообразии M корректно определено гладкое векторное поле $dF(X)$ на N, причем это векторное поле как дифференцирование на многообразии N может быть представлено в виде

$$dF(X) = (F^{-1})^* \circ X \circ F^*.$$

3.3. Фазовый поток векторного поля

Понятию векторного поля на многообразии можно придать физическую интерпретацию, представляя его как поле скоростей частиц потока жидкости. Предположим, что жидкость заполняет все многообразие, в каждой точке P многообразия в каждый момент времени находится частица, которая движется со скоростью $\vec{v}(P)$. В разные моменты времени в точке P могут находиться разные частицы, но скорость их движения будет одна и та же, т.е. скорость движения частиц определяется положением на многобразии и не зависит от времени (такое движение называют *стационарным*). Эта *гидродинамическая интерпретация векторного поля* приводит к новым геометрическим понятиям. Например, каждая частица жидкости, двигаясь по многобразию, проходит некоторую траекторию, которую можно рассматривать как параметризованную кривую (параметром кривой при этом является время). Множество таких траекторий характеризует векторное поле скоростей текущей жидкости. В геометрии многообразий под траекторией следует понимать некоторую гладкую параметризованную кривую, а под полем скоростей потока жидкости — произвольное гладкое векторное поле.

Гладкую параметризованную кривую γ на многообразии M называют *интегральной кривой векторного поля* X, если касательный вектор к этой кривой в каждой ее точке P **рис.3.1** совпадает с X_P (рис. 3.1). Это определение соответствует гидродинамической интерпретации векторного поля. Если параметр t кривой γ интерпретировать как время, а точки кривой — как положение частицы жидкости в соответствующие моменты времени, то касательный вектор к кривой будет выражать мгновенную скорость частицы жидкости.

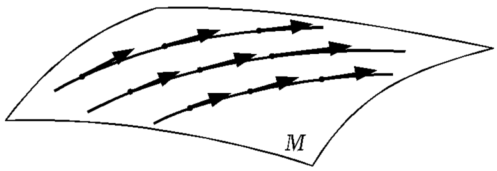

Рис. 3.1

Рассмотрим на многообразии M гладкое векторное поле X. Пусть в локальной системе координат x_1, …, x_n это векторное поле имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Если γ — интегральная кривая векторного поля X, имеющая координатные функции $x_1(t)$, …, $x_n(t)$, то касательный вектор к этой кривой в точке, соответствующей значению t параметра, имеет координаты $\dot{x}_1(t)$, …, $\dot{x}_n(t)$ (здесь и далее точка обозначает производную по времени). Поскольку, согласно определению интегральной кривой, касательный вектор к этой кривой совпадает со значением векторного поля, то

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \dot{x}_n(t) = a_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)). \end{cases}$$

Мы получили систему обыкновенных дифференциальных уравнений (систему ОДУ), которую можно записать кратко в виде $\dot{x} = A(x)$, где $x = (x_1 \; \ldots \; x_n)^{\mathrm{T}}$, $A(x)$ — векторная функция многих переменных вида $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, координатными функциями которой являются координатные функции $a_i(x_1, \ldots, x_n)$ векторного поля X.

Итак, координатное представление $x(t)$ любой интегральной кривой векторного поля X является решением системы ОДУ $\dot{x} = A(x)$. Очевидно, что верно и обратное: любое решение этой системы ОДУ представляет собой интегральную кривую векторного поля X. Открывшаяся связь теории многообразий с теорией дифференциальных уравнений оказывается очень глубокой и весьма плодотворной. В данном случае эта связь позволяет для исследования векторных полей привлечь методы теории дифференциальных уравнений.

Отметим, что полученная нами система является нормальной автономной системой ОДУ, причем правые части уравнений системы являются гладкими функциями.

Задача определения интегральной кривой, проходящей через данную точку $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, сводится к поиску решения системы ОДУ, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x^0$, т.е. к задаче Коши для нормальной системы ОДУ. Согласно теореме Коши существования и единственности решения системы ОДУ, эта задача имеет единственное решение. Параметрами этой задачи являются координаты точки x^0 и начальный момент времени t_0, который можно менять произвольным образом. Действительно, если $\gamma(t)$ является интегральной кривой, удовлетворяющей условию $\gamma(t_0) = P$, то $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(t+\alpha)$ также является интегральной кривой, причем эта интегральная кривая удовлетворяет условию $\widetilde{\gamma}(t_0 - \alpha) = P$. Если не различать параметризованные кривые, которые преобразуются друг в друга заменой параметра вида $\tau = t + \alpha$ (сдвигом параметра), то можно утверждать, что через каждую точку многообразия проходит единственная интегральная кривая, две интегральные кривые либо не пересекаются, либо совпадают.

Эти свойства интегральных кривых легко понять, исходя из гидродинамической интерпретации векторного поля. Интегральные кривые поля скоростей потока жидкости — это траектории движения частиц жидкости. Траектории не могут пересекаться, так как иначе в точке их пересечения у частицы жидкости было бы два варианта движения, а это противоречит физическому смыслу задачи.

Течение жидкости можно изучать, рассматривая положение ее частиц в различные моменты времени. Частица жидкости, находящаяся в точке $P \in M$ в начальный момент времени $t = 0$, к моменту времени $t > 0$ перейдет в другую точку (или была в другой точке при $t < 0$), которую мы обозначим через $A_t(P)$. Положение $A_t(P)$ частицы является функцией как времени t, так и начального положения P. При фиксированном моменте времени t мы получаем отображение $A_t\colon M \to M$, которое точку P многообразия M переводит в точку $A_t(P)$. Отметим, что при $t = 0$ отображение A_t сводится к тождественному. Кроме того, композиция $A_t \circ A_s$ отражает изменения в положении частиц за период времени, равный $t + s$, т.е. совпадает с отображением A_{t+s}.

Описанные свойства потока жидкости на самом деле не связаны с гидродинамической интерпретацией и относятся к произвольным векторным полям.

Теорема 3.4. Для любого гладкого векторного поля X на многообразии M существует семейство открытых множеств $\{U_t \subseteq M\}$ и семейство отображений $A_t\colon U_t \to M$, $t \in \mathbb{R}$, обладающие свойствами:

1°. $U_0 = M$, а A_0 — тождественное отображение.

2°. $U_t \subset U_s$ при $0 < s < t$ или при $t < s < 0$.

3°. $\cup_{t>0} U_t = \cup_{t<0} U_t = M$.

4°. $A_t(U_s) \subset U_{s-t}$, где $0 < t < s$ или $s < t < 0$.

5°. $A_{t+s} = A_t \circ A_s$.

6°. $A_{-t} = (A_t)^{-1}$.

7°. $A_t\colon U_t \to U_{-t}$ — диффеоморфизм.

8°. Для любой точки $P \in M$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $A_t(P), t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, есть интегральная кривая векторного поля X.

Док–во см. в [3, §11.7].

Семейство отображений $A_t\colon U_t \to M$ из теоремы 3.4 называют *фазовым потоком векторного поля* X.

Теорема 3.5. Если гладкому векторному полю X на многообразии M соответствует фазовый поток $\{A_t\}$ и f — гладкая функция на M, то

$$X(f) = \frac{\partial}{\partial t}\big(A_t^*(f)\big)\Big|_{t=0} \quad \text{и} \quad X\big(A_t^*(f)\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(A_t^*(f)\big) = A_t^*\big(X(f)\big). \tag{3.2}$$

Док–во. Фиксируем точку $P \in M$. Из свойства 8 фазового потока (см. теорему 3.4) следует, что $A_\tau(P), \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, есть интегральная кривая векторного поля X. Так как эта кривая проходит через точку P: $A_0(P) = P$, то касательный вектор к этой кривой в точке P совпадает с X_P. Используя формулу из задачи 2.1, получаем

$$\Big(X\big(A_t^*(f)\big)\Big)(P) = X_P\big(A_t^*(f)\big) = \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(A_t^*(f)\big(A_\tau(P)\big)\Big)\Big|_{\tau=0}.$$

Из определения индуцированного отображения, свойства 5 фазового потока (см. теорему 3.4) и определения производной следует, что

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Big(A_t^*(f)\big(A_\tau(P)\big)\Big)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau}\big((f \circ A_t \circ A_\tau)(P)\big)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau}\big((f \circ A_{t+\tau})(P)\big)\Big|_{\tau=0} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\big((f \circ A_t)(P)\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(A_t^*(f)\big)(P).$$

Таким образом доказано второе равенство в (3.2). При $t = 0$ из него следует первое равенство. $\triangleright$

Задача 3.2 Докажите третье равенство в (3.2).

3.4. Коммутатор векторных полей

На многообразии M рассмотрим два векторных поля X и Y. Будем их интерпретировать как дифференцирования $\mathbb{R}$–алгебры $C^\infty(M)$. С помощью этих двух отображений составим новое отображение $X \circ Y - Y \circ X$ $\mathbb{R}$–алгебры $C^\infty(M)$ в себя.

Задача 3.3 Докажите, что отображение $X \circ Y - Y \circ X$ является дифференцированием.

Векторное поле, соответствующее дифференцированию $X \circ Y - Y \circ X$, называют *коммутатором векторных полей* X и Y и обозначают $[X, Y]$.

Задача 3.4 Пусть в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ на многообразии M гладкие векторные поля X и Y имеют вид

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Докажите, что

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Big(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\Big) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.3}$$

Формулу (3.3) можно переписать следующим образом. Рассмотрим векторные функции многих переменных $X(x) = (a_1(x)\dots a_n(x))^T$ и $Y(x) = (b_1(x)\dots b_n(x))^T$, составленные из координатных функций векторных полей (здесь $x = (x_1,\dots,x_n)$). Тогда для векторной функции $Z(x) = (c_1(x)\dots c_n(x))^T$, составленной из координатных функций векторного поля $[X,Y]$, имеем

$$Z(x) = Y'(x)\,X(x) - X'(x)\,Y(x),$$

где $X'(x)$ и $Y'(x)$ — матрицы Якоби функций $X(x)$ и $Y(x)$.

Теорема 3.6. Коммутатор векторных полей обладает следующими свойствами:
1°. $[X,\alpha Y+\beta Z] = \alpha[X,Y]+\beta[X,Z]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (линейность).
2°. $[X,Y] = -[Y,X]$ (антикоммутативность).
3°. $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0$ (*тождество Якоби*).

Док–во. Доказательство каждого свойства состоит в проверке того, что левой и правой частям доказываемого равенства соответствуют равные дифференцирования алгебры гладких функций на многообразии. $\triangleright$

Задача 3.5 Докажите теорему 3.6.

Линейное пространство $\mathcal{A}$, в котором задана операция, удовлетворяющая свойствам 1°–3°, т.е. линейная, антикоммутативная, подчиняющаяся тождеству Якоби, называют *алгеброй Ли.* Сформулированная теорема утверждает, что линейное пространство гладких векторных полей на многообразии M с коммутатором векторных полей есть алгебра Ли. Примером алгебры Ли может также служить линейное пространство V_3 свободных векторов с операцией векторного умножения.

Дадим геометрическую интерпретацию коммутатора векторных полей. Пусть X и Y — векторные поля на многообразии M и $P\in M$. Обозначим через $\{A_\tau\}$ и $\{B_\tau\}$ фазовые потоки векторных полей X и Y. Пусть t — достаточно малое число. Построим в точке P интегральную кривую $\gamma_1(\tau) = A_\tau(P)$ векторного поля X, из точки $\gamma_1(t) = A_t(P)$ проведем интегральную кривую $\gamma_2(\tau) = B_\tau(A_t(P))$ векторного поля P. Затем из точки $\gamma_2(t)$ проведем интегральную кривую $\gamma_3(\tau)$ векторного поля $-X$, а из точки $\gamma_3(t)$ — интегральную кривую $\gamma_4(\tau)$ векторного поля $-Y$. Рассмотрим отображение, которое числу t^2
рис.3.2 ставит в соответствие точку $\gamma_4(t)$ (рис. 3.2). Это отображение задает на поверхности M параметризованную кривую $\gamma(t)$, которую можно представить в виде

$$\gamma(t^2) = (B_{-t}\circ A_{-t}\circ B_t\circ A_t)(P).$$

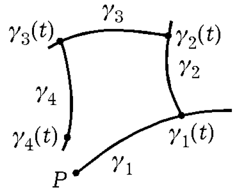

Рис. 3.2

Теорема 3.7. Вектор $[X,Y]_P$ является касательным вектором к параметризованной кривой $\gamma(t)$ в точке P.

Док–во см. в [3, §11.8, теорема 11.21].

Теорема 3.8. Пусть X и Y — гладкие векторные поля на многообразии M, причем векторному полю X соответствует фазовый поток $\{A_t\}$. Тогда

$$[Y, X] = \frac{d}{dt} dA_t(Y)\Big|_{t=0}.$$

Док–во см. в [3, §11.8, теорема 11.22].

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Говорят, что на многообразии M задано *распределение* (или *дифференциальная система*, или *структура Пфаффа*) $\mathcal{F}$, если в каждой точке $P \in M$ задано линейное подпространство $\mathcal{F}_P$ касательного пространства $T_P M$ (рис. 4.1).

рис.4.1

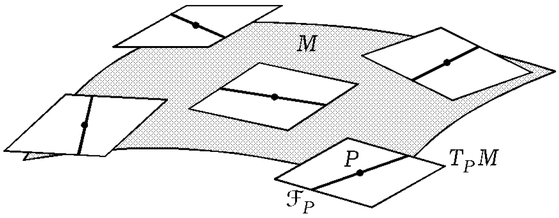

Рис. 4.1

Если размерность линейных подпространств $\mathcal{F}_P$ постоянна для всех точек P из некоторой окрестности точки $Q \in M$, то распределение $\mathcal{F}$ называют *регулярным в точке* Q, а размерность каждого линейного подпространства $\mathcal{F}_P$ называют *размерностью распределения* $\mathcal{F}$ в окрестности точки Q и обозначают $\dim \mathcal{F}$. Распределение называют *регулярным*, если оно регулярно в каждой точке многообразия.

Распределения можно задавать с помощью семейств векторных полей. Пусть на многообразии M задано семейство $\{X_\alpha\}$ векторных полей. Тогда в каждой точке $P \in M$ определено множество $\{X_\alpha\big|_P\}$ касательных векторов к многообразию M в точке P, т.е. подмножество линейного пространства $T_P M$. Сопоставив точке P линейное подпространство $\mathcal{F}_P$, являющееся линейной оболочкой множества $\{X_\alpha\big|_P\}$, получим распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M. В этом случае мы будем называть семейство $\{X_\alpha\}$ *семейством, порождающим распределение* $\mathcal{F}$.

Наиболее распространенным является случай конечного семейства векторных полей X_i, $i = \overline{1, k}$. Если в каждой точке P система касательных векторов $X_i\big|_P$, $i = \overline{1, k}$, линейно независима, то $\dim \mathcal{F}_P = k$, $P \in M$, и мы имеем дело с регулярным распределением на многообразии M размерности k. Однако в практических приложениях возникают системы векторных полей X_i, линейно независимые на всем многообразии за исключением относительно небольшого (возможно, и конечного) множества точек, в которых свойство линейной независимости теряется. В этом случае система X_i, $i = \overline{1, k}$, порождает нерегулярное распределение. Это распределение становится регулярным, если его ограничить на открытом подмножестве многообразия, не содержащем точки нерегулярности.

Распределение $\mathcal{F}$, порожденное семейством $\{X_\alpha\}$ гладких векторных полей, называют *гладким*. Далее рассматриваются гладкие регулярные распределения.

На n-мерном многообразии M рассмотрим некоторое k-мерное подмногообразие N. Подмногообразие N имеет структуру гладкого многообразия, а касательное пространство $T_P N$ к многообразию N можно рассматривать как линейное подпространство касательного пространства $T_P M$ к многообразию M в точке P. Любое распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M порождает распределение $\widetilde{\mathcal{F}}$ на подмногообразии N, для которого $\widetilde{\mathcal{F}}_P = \mathcal{F}_P \cap T_P N$, $P \in N$.

Если распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M и подмногообразие N многообразия M в любой точке $P \in N$ связаны условием $T_P N \subset \mathcal{F}_P$, то мы будем называть распределение $\mathcal{F}$ по отношению к N *распределением, касающимся подмногообразия* N, а подмногообразие N по отношению к распределению $\mathcal{F}$ — *интегральным многообразием.* Интегральное многообразие N распределения $\mathcal{F}$ будем называть *максимальным интегральным многообразием*, если не существует интегрального многообразия большей размерности, содержащего N.

Задача 4.1 Приведите пример гладкого регулярного распределения, для которого через точку проходит два разных максимальных интегральных многообразия.

Регулярное распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M называют *интегрируемым*, если через каждую точку $P \in M$ проходит максимальное интегральное многообразие размерности $\dim \mathcal{F}_P$, причем любые два таких многообразия, проходящих через точку P, в некоторой
рис.4.2 окрестности этой точки совпадают (рис. 4.2).

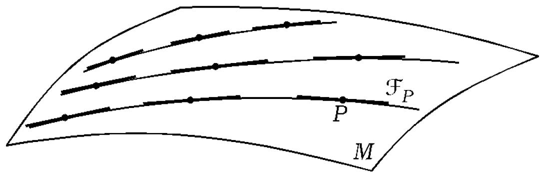

Рис. 4.2

Теорема 4.1. Гладкое регулярное k-мерное распределение $\mathcal{F}$ многообразия M интегрируемо тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in M$ в достаточно малой окрестности этой точки существует такая система координат $z_1, \ldots, z_n$, что распределение порождается координатными векторными полями $\dfrac{\partial}{\partial z_i}$, $i = \overline{1, k}$.

Док–во этой теоремы см. в [3, теорем 11.27].

Будем говорить, что *векторное поле X принадлежит распределению $\mathcal{F}$*, и писать $X \in \mathcal{F}$, если $X_P \in \mathcal{F}_P$ в каждой точке $P \in M$. Множество всех гладких векторных полей, принадлежащих данному распределению $\mathcal{F}$, обозначим $\mathcal{D}(\mathcal{F})$. На этом множестве определены операции сложения векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию. Действительно, если $X, Y \in \mathcal{D}(F)$, то в каждой точке $P \in M$ верны соотношения $X_P \in \mathcal{F}_P$ и $Y_P \in \mathcal{F}_P$. Следовательно, $(X+Y)_P = X_P + Y_P \in \mathcal{F}_P$ и $(fX)_P = f(P)X_P \in \in \mathcal{F}_P$, так как $\mathcal{F}_P$ есть линейное подпространство $T_P M$. Таким образом, множество $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ замкнуто относительно операций сложения векторных полей и умножения векторного поля на гладкую функцию, т.е. является подмодулем модуля $\mathcal{D}(M)$. Этот подмодуль называют *модулем распределения $\mathcal{F}$*.

Кроме операций сложения и умножения на функцию, для гладких векторных полей имеется еще одна операция — коммутатор векторных полей. Модуль распределения может быть не замкнут относительно коммутатора векторных полей, т.е. могут существовать векторные поля, принадлежащие распределению, коммутатор которых не принадлежит распределению.

Распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M называют *инволютивным*, если его модуль $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ замкнут относительно коммутатора векторных полей, т.е. $[X, Y] \in \mathcal{F}$ для любых гладких векторных полей $X \in \mathcal{F}$ и $Y \in \mathcal{F}$. Модуль инволютивного распределения является алгеброй Ли.

Теорема 4.2 (*теорема Фробениуса*). Гладкое регулярное распределение $\mathcal{F}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда оно инволютивно. Так, если гладкие векторные поля X_i, $i = \overline{1,\, k}$, порождают регулярное распределение $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда существуют такие функции c_{ij}^l, что

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=1}^{k} c_{ij}^l X_l, \qquad 1 \le i < j \le k.$$

Доказательство теоремы Фробениуса см. в [4, гл. 3, §5].

Задача 4.2 Приведите пример гладкого регулярного неинволютивного распределения в $\mathbb{R}^3$.

О том, как найти систему координат из теоремы 4.1 и тем самым описать максимальные интегральные многообразия регулярного инволютивного распределения, см. в [3, §11.9].

Предположим, что k-мерное гладкое регулярное интегрируемое распределение $\mathcal{F}$ на многообразии M порождается гладкими векторными полями $X_1, \ldots, X_k$. Согласно теореме 4.1, в некоторой окрестности U произвольной точки $P \in M$ существует такая система координат $z_1, \ldots, z_n$, что распределение $\mathcal{F}$ порождается координатными векторными полями $\dfrac{\partial}{\partial z_i}$, $i = \overline{1,\, k}$. Тогда максимальные интегральные многообразия распределения $\mathcal{F}$ в окрестности U описываются уравнениями

$$z_{k+1} = c_{k+1}, \quad z_{k+2} = c_{k+2}, \quad \ldots, \quad z_n = c_n, \tag{4.1}$$

где $c_{k+1}, \ldots, c_n$ — некоторые постоянные. Как найти такую систему координат, решив тем самым задачу описания максимальных интегральных многообразий регулярного распределения $\mathcal{F}$?

Уравнения 4.1 означают, что координатные функции $z_{k+1}, \ldots, z_n$ являются постоянными на каждом максимальном интегральном многообразии в U. Значит, часть координатных функций искомой системы координат следует искать среди гладких функций, постоянных на максимальных интегральных многообразиях распределения $\mathcal{F}$. Такие функции в системе координат $z_1, \ldots, z_n$ имеют вид $F(z_{k+1}, \ldots, z_n)$, где F — произвольная гладкая функция $n-k$ переменных. Множество этих функций совпадает с множеством решений системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial z_i} = 0, \quad i = \overline{1,\, k}. \tag{4.2}$$

Учитывая, что распределение $\mathcal{F}$ порождается и системой векторных полей X_i, $i = \overline{1,\, k}$, и системой векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial z_i}$, $i = \overline{1,\, k}$, заключаем, что система 4.2 эквивалентна системе уравнений

$$X_i(u) = 0, \quad i = \overline{1,\, k}. \tag{4.3}$$

Действительно, так как векторные поля X_i, $i = \overline{1,\, k}$, порождают распределение $\mathcal{F}$, любое векторное поле X, принадлежащее $\mathcal{F}$, можно представить в виде линейной комбинации векторных полей X_i, т.е.

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_k X_k.$$

Из этого равенства заключаем, что любое решение системы 4.3 удовлетворяет уравнению $X(u) = 0$. В частности, любое решение системы 4.3 удовлетворяет и системе 4.2. Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что любое решение системы 4.2 удовлетворяет системе 4.3.

Функцию f, которая для данного гладкого векторного поля X удовлетворяет уравнению $X(f) = 0$, называют *первым интегралом векторного поля* X. Мы можем теперь интерпретировать задачу описания максимальных интегральных многообразий интегрируемого распределения, порожденного системой векторных полей $X_1, \ldots, X_k$, как задачу поиска общих первых интегралов векторных полей $X_1, \ldots, X_k$.

Выберем в окрестности точки P какую-либо систему координат $x_1, \ldots, x_n$ и запишем в координатах векторные поля X_i:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1,\, k}.$$

Тогда система уравнений 4.3 примет вид

$$\begin{cases} a_{11} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_{1n} \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_{kn} \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

т.е. искомые функции являются решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициентами которой являются гладкие функции.

Рассмотрим произвольную систему дифференциальных уравнений вида 4.4. В каких случаях такая система имеет решения? Ответ можно дать, связывая систему вида 4.4 с распределением на многообразии. Пусть, например, функции $a_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ определены в окрестности U некоторой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Множество U можно рассматривать как n-мерное многообразие с атласом из одной карты, на котором определены гладкие векторные поля

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = \overline{1,\, k}. \tag{4.5}$$

Эти векторные поля порождают распределение $\mathcal{F}$, и процесс решения системы 4.4 можно рассматривать как построение интегральных многообразий распределения $\mathcal{F}$.

Если распределение $\mathcal{F}$ инволютивно, регулярно и $\dim \mathcal{F} = k$, то можно найти $n - k$ функций $u_1, \ldots, u_{n-k}$, постоянных на интегральных многообразиях, которые в некоторой системе координат являются координатными. Тогда любая постоянная функция на интегральном многообразии может быть записана в виде $F(u_1, \ldots, u_{n-k})$, где F — произвольная гладкая функция $n - k$ переменных. Инволютивность распределения $\mathcal{F}$ равносильна выполнению условий Фробениуса. Записывая эти условия в координатной форме, подведем итог, сформулировав теорему.

Теорема 4.3. Пусть коэффициенты a_{ij} системы дифференциальных уравнений 4.4 удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(a_{ri} \frac{\partial a_{sj}}{\partial x_i} - a_{si} \frac{\partial a_{rj}}{\partial x_i} \Big) = \sum_{m=1}^{k} c_{rs}^{m} a_{mj}, \quad r,\, s = \overline{1,\, k}, \quad j = \overline{1,\, n},$$

где c_{rs}^m — некоторые функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, а функциональная матрица (a_{ij}) имеет ранг k, $k < n$. Тогда для любой точки P из области определения системы 4.4 в некоторой ее окрестности U существуют такие решения $u_1, u_2, \ldots, u_{n-k}$ этой системы, что матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, $i = \overline{1, n{-}k}$, $j = \overline{1, n}$, имеет ранг $n - k$. Для любого набора решений u_1, u_2, …, u_{n-k}, имеющего в U матрицу Якоби ранга $n - k$, каждое решение системы в U можно представить в виде $F(u_1, \ldots, u_{n-k})$, где F — гладкая функция $n - k$ переменных.

Если распределение $\mathcal{F}$, порожденное векторными полями 4.5, не является инволютивным, то нужно рассмотреть его *инволютивное замыкание* $\widetilde{\mathcal{F}}$, т.е. такое инволютивное распределение, что, во-первых, $\widetilde{\mathcal{F}}_P \supset \mathcal{F}_P$ в каждой точке $P \in M$, а во-вторых, для любого инволютивного распределения $\mathcal{G}$, удовлетворяющего условию $\mathcal{G}_P \supset \mathcal{F}_P$, выполняется включение $\mathcal{G}_P \supset \widetilde{\mathcal{F}}_P$. Можно кратко сказать, что инволютивное замыкание распределения $\mathcal{F}$ — это наименьшее инволютивное распределение, включающее в себя распределение $\mathcal{F}$.

Чтобы построить инволютивное замыкание распределения, порожденного гладкими векторными полями X_1, …, X_k, необходимо расширить систему векторных полей следующим образом. Сначала к системе векторных полей добавим коммутаторы $[X_i, X_j]$, для которых нет представления вида

$$[X_i, X_j] = \sum_{m=1}^{k} c_{ij}^m X_m.$$

Для пополненной таким образом системы повторим процедуру пополнения, добавляя коммутаторы векторных полей, входящих в систему, причем те коммутаторы, которые представляются в виде линейной комбинации исходных векторных полей, игнорируются. Процедуру пополнения системы векторных полей продолжаем до тех пор, пока на очередном шаге не окажется, что все коммутаторы векторных полей являются линейными комбинациями векторных полей последней пополненной системы.

Распределение, порожденное пополненной системой векторных полей, является инволютивным, так как любой коммутатор векторных полей системы является линейной комбинацией векторных полей системы, а потому принадлежит распределению. Это распределение является наименьшим, поскольку инволютивное замыкание вместе с векторными полями X_i содержит и все их коммутаторы, а также коммутаторы этих коммутаторов и т.п.

Если система векторных полей X_i соответствует системе линейных дифференциальных уравнений в частных производных вида 4.4, то пополненная система векторных полей соответствует системе дифференциальных уравнений, полученной из исходной добавлением новых уравнений. Отметим, что если $Y(u) = 0$ и $Z(u) = 0$, то

$$[Y, Z](u) = Y(Z(u)) - Z(Y(u)) = Y(0) - Z(0) = 0.$$

Следовательно, множество решений исходной системы дифференциальных уравнений и множество решений пополненной системы дифференциальных уравнений совпадают. Но в случае пополненной системы дифференциальных уравнений можно использовать (при некоторых ограничениях) теорему 4.3, а это позволяет получить описание всех решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Пусть векторные поля $X_1, \ldots, X_k$ таковы, что для любого числа $r = \overline{1, k}$ векторные поля X_1, …, X_r порождают инволютивное регулярное распределение размерности r. Тогда общие первые интегралы векторных полей X_1, …, X_k можно находить последовательно. Сначала определяются первые интегралы векторного поля X_1, затем общие первые интегралы пары векторных полей X_1, X_2, затем общие первые интегралы трех векторных полей и т.д. Пусть найдены общие первые интегралы векторных полей X_1, …, X_r. Согласно теореме 4.3, можно выбрать такие функции u_1, …, u_{n-r}, что любой общий первый интеграл u векторных полей $X_1, \ldots, X_r$ имеет вид $u = F(u_1, \ldots, u_{n-r})$, где F — произвольная гладкая функция. Подставляя это представление в уравнение $X_{r+1}(u) = 0$, приходим к линейному дифференциальному уравнению в частных производных относительно функции F. Каждому решению этого уравнения соответствует общий первый интеграл системы векторных полей $X_1, \ldots, X_{r+1}$. Тем самым мы получаем множество общих первых интегралов векторных полей $X_1, \ldots, X_{r+1}$. Последовательно применяя этот подход для $r = 1$, $2, \ldots, k-1$, приходим к описанию общих первых интегралов векторных полей $X_1, \ldots, X_k$.

Пример 4.1. В $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z исследуем на интегрируемость распределение $\mathcal{F}$, порожденное векторными полями

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = e^x\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поскольку векторные поля X и Y гладкие, распределение $\mathcal{F}$ гладкое. Матрица, составленная из координатных функций векторных полей, т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^x \\ -z & -2y \end{pmatrix},$$

всюду в $\mathbb{R}^3$ имеет ранг 2. Следовательно, рассматриваемое распределение является регулярным. Вычислим коммутатор векторных полей X и Y:

$$[X, Y] = e^x\frac{\partial}{\partial y} - 2y\frac{\partial}{\partial z} = Y.$$

Из результатов вычисления заключаем, что распределение $\mathcal{F}$ инволютивно. Согласно теореме Фробениуса, это распределение интегрируемо.

Определим максимальные интегральные многообразия этого распределения. Чтобы найти первые интегралы векторного поля X, используем *симметричную форму записи системы ОДУ*, соответствующей векторному полю X:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{-z}.$$

Из этих равенств получаем

$$dx + \frac{dz}{z} = 0, \quad dy = 0.$$

Отсюда легко найти первые интегралы системы ОДУ, или первые интегралы векторного поля X: $p = ze^x$, $q = y$. Множество первых интегралов u векторного поля X описывается формулой $u = F(p, q)$, где $p = ze^x$, $q = y$, а F — гладкая функция двух переменных. Среди таких функций ищем первые интегралы векторного поля Y. Согласно правилу сложной функции, имеем

$$Y(u) = e^x\frac{\partial u}{\partial y} - 2y\frac{\partial u}{\partial z} = e^x\frac{\partial F}{\partial q} - 2ye^x\frac{\partial F}{\partial p} = 0,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial q} - 2q\frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Итак, функция $F(p, q)$ является первым интегралом векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial q} - 2q\dfrac{\partial}{\partial p}$. Снова используем симметричную форму записи соответствующей системы ОДУ:

$$\frac{dq}{1} = \frac{dp}{-2q}.$$

Система состоит из единственного уравнения, решая которое находим его первый интеграл $u = p + q^2$. Все множество первых интегралов u векторного поля $\dfrac{\partial}{\partial q} - 2q\dfrac{\partial}{\partial p}$ описывается формулой $u = G(p + q^2)$, где G — гладкая функция одного действительного переменного. Подставляя вместо p и q найденные выше первые интегралы векторного поля X, получаем общие первые интегралы векторных полей X и Y:

$$u = G(ze^x + y^2).$$

Для описания максимальных интегрируемых многообразий достаточно взять один первый интеграл $u = ze^x + y^2$. Отметим, что матрица Якоби функции $u(x, y, z)$, равная $(ze^x \;\; 2y \;\; e^x)$, не обращается в нуль ни в одной точке в $\mathbb{R}^3$. Максимальные интегральные многообразия распределения $\mathcal{F}$, порожденного векторными полями X и Y, описываются уравнением

$$ze^x + y^2 = C,$$

где C — произвольная постоянная.

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_{1n}\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = f_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_{mn}\dfrac{\partial u}{\partial x_n} = f_m, \end{cases} \tag{5.1}$$

где a_{ij}, $i = \overline{1,\, m}$, $j = \overline{1,\, n}$, и f_i, $i = \overline{1,\, m}$, — заданные гладкие функции переменных x_1, ..., x_n, определенные в некоторой области $M \subset \mathbb{R}^n$. Введем на M гладкие векторные поля

$$X_i = a_{i1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_{in}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad i = \overline{1,\, m}.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений можно записать в виде

$$X_i(u) = f_i, \quad i = \overline{1,\, m}. \tag{5.2}$$

Система дифференциальных уравнений (5.1) (или система (5.2)) в частном случае $f_i = 0$, $i = \overline{1,\, m}$, является однородной системой линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которую можно решить, используя инволютивные распределения. Покажем, что решение неоднородной системы можно свести к однородному случаю. Для простоты остановимся на случае, когда n-мерное многообразие M является областью в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.1. Гладкая функция $u(x_1, \ldots, x_n)$ на M является решением системы (5.2) в том и только в том случае, когда функция $v(x_0, x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n) + x_0$ является решением системы

$$Z_i(v) = 0, \quad i = \overline{1,\, m},$$

где $Z_i = X_i - f_i\dfrac{\partial}{\partial x_0}$.

Док–во. В силу специального вида векторных полей Z_i и функции v имеем

$$Z_i(v) = Z_i(u) + Z_i(x_0) = X_i(u) - f_i\frac{\partial u}{\partial x_0} + X_i(x_0) - f_i\frac{\partial x_0}{\partial x_0} = X_i(u) - f_i.$$

Из равенства $Z_i(v) = X_i(u) - f_i$ немедленно вытекает утверждение теоремы. ▹

Теорема 5.2. Предположим, что гладкие векторные поля X_1, ..., X_m в точке P многообразия M линейно независимы и имеют место представления

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k X_k, \quad i,\, j = \overline{1,\, m}, \tag{5.3}$$

где c_{ij}^k — гладкие функции на многообразии M. Тогда, для того чтобы система (5.2) имела решения в некоторой окрестности точки P, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки P выполнялись *условия совместности системы дифференциальных уравнений* (5.2):

$$X_i(f_j) - X_j(f_i) = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k f_k, \quad i,\, j = \overline{1,\, m}. \tag{5.4}$$

Док–во см. в [3, Дополнение 11.1].

Задача 5.1 Найдите все решения системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} z^2\dfrac{\partial u}{\partial y} - y\dfrac{\partial u}{\partial z} = ye^{-x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + xy\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Задача 5.2 Докажите несовместность системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

6.1. Динамические системы с управлением

Систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x, u), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad u \in \mathbb{R}^m, \tag{6.1}$$

где $\dot{x}(t) = x'(t)$, называют *динамической системой с управлением* (или просто *системой с управлением*). Решением такой системы является любая пара вектор-функций $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию $x'(t) \equiv f(t, x(t), u(t))$. При этом значение $x(t)$ вектор-функции x при заданном значении t называют *состоянием системы* в момент времени t, кривую $x = x(t)$ — *траекторией системы*, а вектор-функцию u — *управлением*. Различают *векторное управление*, соответствующее случаю $m > 1$, и *скалярное управление*, соответствующее случаю $m = 1$.

Если функция f является гладкой, то при заданной гладкой функции u система с управлением $\dot{x} = f(t, x, u)$ имеет решение, подчиняющееся начальному условию $x(t_0) = x_0$, и притом единственное. Выбирая различные управления $u(t)$, мы получаем различные решения $x(t)$. Типичной *задачей теории управления* является такой выбор управления $u(t)$, при котором решение $(x(t),\ u(t))$ обладает нужными свойствами.

Систему (6.1) называют *регулярной*, если вектор-функция $f(t, x, u)$ гладкая (бесконечно дифференцируемая), а $\mathrm{Rg}\,(\partial f/\partial u) = m$ для всех рассматриваемых значений переменных t, x, u.

рис.6.1

Пример 6.1. Положение автомобиля можно охарактеризовать тремя параметрами: декартовыми координатами x, y середины P задней оси автомобиля и углом θ, который прямая, проходящая через середины P и Q двух осей, составляет с осью абсцисс (рис. 6.1).

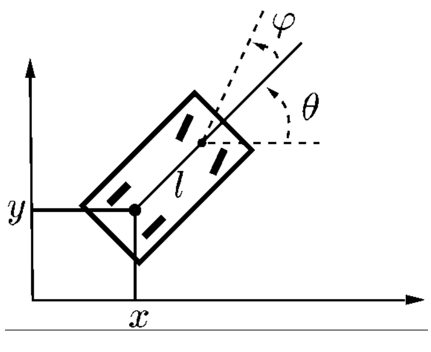

Рис. 6.1

При таком выборе параметров движение автомобиля описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = u\cos\theta, \\ \dot{y} = u\sin\theta, \\ \dot{\theta} = \dfrac{u}{d}\,\mathrm{tg}\,\varphi, \end{cases} \tag{6.2}$$

где u — скорость автомобиля, φ — угол поворота колес передней оси относительно прямой PQ, а d — расстояние между передней и задней осями (т.е. между точками P и Q).

Система (6.2) представляет собой систему с управлением, причем в данном случае управление векторное и имеет две составляющие u и φ. Положение автомобиля характеризуется трехмерным вектором состояний $(x\ \ y\ \ \theta)^{\mathrm{T}}$. Значения переменных x, y, θ, φ, u имеют естественные ограничения.

Для данной модели поставим следующую задачу теории управления: найти управление, при котором автомобиль из заданного начального положения $(x_0\ \ y_0\ \ \theta_0)^{\mathrm{T}}$ в момент времени t_0 перейдет в заданное конечное положение $(x_1\ \ y_1\ \ \theta_1)^{\mathrm{T}}$ в момент времени t_1. Это значит, что требуется найти такие функции $u(t)$ и $\varphi(t)$, при которых решение задачи Коши для нормальной системы ОДУ (6.2) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $\theta(t_0) = \theta_0$ удовлетворяет дополнительным условиям $x(t_1) = x_1$, $y(t_1) = y_1$, $\theta(t_1) = \theta_1$.

Задачу теории управления, рассмотренную в примере 6.1, называют *задачей терминального управления*.

Дадим дифференциально–геометрическую интерпретацию задаче терминального управления. При заданном управлении $u(t)$ система с управлением $\dot{x} = f(t, x, u(t))$ становится нормальной системой ОДУ, в общем случае не являющейся автономной. Эта система будет неавтономной, даже если первоначальная система с управлением была автономной (стационарной), так как управление u зависит от t.

Мы видели, что каждому векторному полю на многообразии в заданной локальной системе координат соответствует *автономная нормальная система ОДУ*. Эта связь позволяет для исследования автономных систем ОДУ использовать геометрические методы. Чтобы такую связь распространить на неавтономные системы, можно поступить следующим образом. Неавтономную систему ОДУ $\dot{x} = f(t, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, можно преобразовать в автономную систему добавлением одного нового переменного x_0:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x_0, x), \\ \dot{x}_0 = 1. \end{cases}$$

Если $x(t)$ — решение исходной системы ОДУ с начальным условием $x(t_0) = x^0$, то $(t,\ x(t))$ есть решение преобразованной системы с начальным условием $x(t_0) = x^0$, $x_0(t_0) = t_0$, и наоборот.

Указанное преобразование позволяет неавтономной системе сопоставить векторное поле на $(n+1)$-мерном многообразии. Например, если исходная система $\dot{x} = f(t, x)$, $f = (f_1\ \ \ldots\ \ f_n)^{\mathrm{T}}$, задана в области $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (т.е. $(t,\ x) \in M$), то ей можно поставить в соответствие векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда интегральная кривая $(x_0(t),\ x(t))$ векторного поля X, проходящая через точку $(x_0^0,\ x^0)$, будет являться решением системы ОДУ $\dot{x} = f(x_0, x)$, $\dot{x}_0 = 1$ с начальным условием $x_0(t_0) = x_0^0$, $x(t_0) = x^0$. Отсюда следует, что $x_0(t) = (t - t_0) + x_0^0$, а $x(t)$ удовлетворяет системе ОДУ $\dot{x} = f(t - t_0 + x_0^0, x)$. Достаточно в качестве начального момента времени взять $t_0 = x_0^0$, чтобы вектор-функция $x(t)$ оказалась решением системы $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Автономные системы ОДУ можно рассматривать как частный случай неавтономных систем. Это позволяет системе $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f = (f_1\ \ \ldots\ \ f_n)^{\mathrm{T}}$, ставить в соответствие векторное поле

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

в *расширенном фазовом пространстве.* Существенное отличие автономного случая от неавтономного состоит в том, что координатные функции векторного поля в автономном случае не зависят от переменного t. Это позволяет заменить векторное поле в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ его проекцией на *фазовое пространство* $\mathbb{R}^n$, для чего в координатном представлении векторного поля достаточно отбросить первое слагаемое. При такой проекции интегральные кривые векторного поля в расширенном фазовом пространстве переходят в интегральные кривые векторного поля в фазовом пространстве.

6.2. Приведение систем с управлением к каноническому виду

Систему с управлением можно рассматривать как векторное поле, которое зависит от управления как функционального параметра. При таком подходе задача теории управления состоит в том, чтобы выбрать управление, при котором интегральные кривые векторного поля будут обладать заданными свойствами.

Пример 6.2. Задачу терминального управления из примера 6.1 можно переформулировать следующим образом: для векторного поля

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + u\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + u\sin\theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{u}{d} \operatorname{tg}\varphi \frac{\partial}{\partial \theta}$$

найти такие функции $u(t)$ и $\varphi(t)$, при которых векторное поле X имеет интегральную кривую, проходящую в два заданных момента времени t_0 и t_1 через две заданные точки.

Две системы с управлением $\dot{x} = f(t, x, u)$ и $\dot{y} = g(t, y, v)$, x, $y \in \mathbb{R}^n$, u, $v \in \mathbb{R}^m$, назовем *эквивалентными*, если существует такая замена переменных $y = y(t, x)$, $v = v(t, x, u)$, при которой любое решение $(x(t),\ u(t))$ первой системы переходит в решение $(y(t, x(t)),\ v(t, x(t), u(t)))$ второй системы, причем эта замена переменных обратима и обратная замена переменных переводит любое решение второй системы в решение первой. Введенное понятие отражает возможность замены заданной системы с управлением другой, эквивалентной исходной. Действительно, если система $\dot{y} = g(t, y, v)$ эквивалентна системе $\dot{x} = f(t, x, u)$, то по решениям первой системы можно найти решения второй и наоборот. Если система с управлением регулярная, то и эквивалентная ей система регулярная.

Возникает задача описания систем с управлением, эквивалентных заданной системе, и задача выбора такой системы, эквивалентной исходной, которая имеет наиболее простой вид. В дифференциально-геометрической интерпретации систем с управлением замена переменных представляет собой смену системы координат на многообразии, а задача выбора наиболее простой системы среди эквивалентных сводится к выбору такой системы координат, в которой векторное поле имеет наиболее простой вид.

В качестве примера остановимся на случае *аффинной системы с управлением*, имеющей следующий вид:

$$\dot{x} = A(t, x) + \sum_{i=1}^{m} B_i(t, x) u_i, \tag{6.3}$$

где A, B_i, $i = \overline{1,\, m}$, — некоторые гладкие вектор-функции. Система (6.3) регулярная, если матрица (B_{ij}), составленная из координатных функций вектор-функций B_i, $i = \overline{1,\, m}$, имеет ранг m для всех рассматриваемых значений переменных t, x, u.

Рассмотрим сначала случай $m = 1$ и выясним, при каких условиях такая регулярная аффинная система эквивалентна аффинной системе вида

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2, \\ \dot z_2 = z_3, \\ \quad \dots\dots\dots \\ \dot z_{n-1} = z_n, \\ \dot z_n = f(z) + g(z)u. \end{cases} \tag{6.4}$$

Такая система регулярная, если функция $g(z) \neq 0$ для всех рассматриваемых значений переменных z. Ограничимся только такими заменами координат, которые не меняют время и управление, т.е. в данном случае заменами вида $z = z(t, x)$, $t = t$, $u = u$. В такой замене функция многих переменных $z = z(t, x)$ должна определять замену координат в области U пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. При этом в новой системе координат система (6.3) имеет вид (6.4).

Вектор-функции A и B можно рассматривать как координатное представление в системе координат x на U двух векторных полей

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда аффинной системе $\dot x = A(t, x) + B(t, x)u$ с управлением будет соответствовать векторное поле $X + uY$. При замене переменных $z = z(t, x)$, оставляющей время и управление неизменными, аффинная система преобразуется так, что сохраняется связь этой системы с векторными полями X и Y.

Введем обозначения

$$\operatorname{ad}_X^0 Y = Y, \quad \operatorname{ad}_X^k Y = \Big[X, \operatorname{ad}_X^{k-1} Y\Big], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 6.1. [6] Для того чтобы регулярная аффинная система $\dot x = A(t, x) + B(t, x)u$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, в некоторой окрестности заданной точки $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ была эквивалентна системе вида (6.4), необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки P распределение $\mathcal{F}$, порожденное векторными полями $\operatorname{ad}_X^k Y$, $k = \overline{0,\, n-2}$, было инволютивным, а векторы $\operatorname{ad}_X^k Y\Big|_P$, $k = \overline{0,\, n{-}1}$, были линейно независимыми.

Док–во. Необходимость. Условия инволютивности распределения $\mathcal{F}$ и линейной независимости векторов в формулировке теоремы сохраняются при замене переменных. Поэтому их достаточно проверить в системе координат $z_1, \dots, z_n$, в которой аффинная система имеет вид (6.4).

Задача 6.1 Проверьте условия инволютивности распределения $\mathcal{F}$ и линейной независимости векторов в формулировке теоремы для системы (6.4) в случае $n = 3$.

Достаточность. Докажем, что при выполнении условий теоремы существует такая замена переменных $z = z(t, x)$, которая аффинную систему $\dot x = A(t, x) + B(t, x)u$ преобразует в систему (6.4).

Так как векторы набора $\operatorname{ad}_X^k Y\Big|_P$, $k = \overline{0, n{-}1}$, линейно независимы, то линейно независимы и первые $n-1$ вектора этого набора. Так как векторные поля $\operatorname{ad}_X^k Y$, $k = \overline{0, n-2}$, гладкие, то они линейно независимы и в некоторой окрестности точки P. Следовательно, распределения $\mathcal{F}$ регулярно и имеет размерность $n-1$. По теореме Фробениуса распределение $\mathcal{F}$ интегрируемо в этой окрестности. Поэтому оно имеет два первых интеграла, матрица из частных производных которых имеет ранг 2 в этой окрестности.

Задача 6.2 Покажите, что функция t есть первый интеграл распределения $\mathcal{F}$.

Таким образом, существует первый интеграл распределения $\mathcal{F}$, у которого не все частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ точке P равны нулю. Обозначим его z_1. По определению первого интеграла распределения $\mathcal{F}$ имеем

$$(\operatorname{ad}_X^k Y)(z_1) = 0, \qquad k = \overline{0, n-2},$$

значит, функция $g = (\operatorname{ad}_X^{n-1} Y)(z_1)$ не равна нулю в точке P. В силу гладкости эта функция не обращается в нуль в некоторой окрестности точки P. Положим

$$z_2 = X(z_1), \qquad z_3 = X(z_2), \ \ldots, \qquad z_n = X(z_{n-1}). \tag{6.5}$$

Задача 6.3 Используя индукцию по i, докажите, что $Y(z_i) = 0$ при $i = \overline{1, n-1}$, а $Y(z_n) = g$.

Обозначим через f функцию $X(z_n)$. Из формул (6.5) и задачи 6.3 получаем

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n-1} z_{i+1}\frac{\partial}{\partial z_i} + f\frac{\partial}{\partial z_n}, \qquad Y = g\frac{\partial}{\partial z_n}.$$

Таким образом, в системе координат $z_1, \ldots, z_n$ рассматриваемая система имеет вид (6.4). Теорема доказана.

Замечание. Доказательство теоремы 6.1 не только подтверждает возможность упрощения аффинной системы с помощью замены переменных, но и дает метод вычисления такой замены переменных. Действительно, функция z_1 может быть найдена как первый интеграл распределения $\mathcal{F}$, у которой не все частные производные по $x_1, \ldots, x_n$ точке P равны нулю, а функции z_i, $i = \overline{2, n}$, — по формулам (6.5). ▷

Задача 6.4 Выясните, каким требованиям должна удовлетворять действительная функция f одного действительного переменного, чтобы система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_2) + x_1 + ux_3, \\ \dot{x}_2 = u, \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases}$$

была эквивалентна системе вида (6.4).

6.3. Преобразование систем с векторным управлением

Пусть размерность n пространства состояний системы (6.3) представлена в виде суммы m целых положительных чисел,

$$n = n_1 + \ldots + n_m.$$

В соответствии с этим разложением переменные

$$z = (z_1, \ldots, z_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$$

разобъм на m групп

$$z = (z^1, \ldots, z^m)^{\mathrm{T}},$$

вводя новые обозначения для переменных:

$$z^1 = (z_1^1, \ldots, z_{n_1}^1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_1}, \ldots, z^m = (z_1^m, \ldots, z_{n_m}^m)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n_m}.$$

Если аффинная система с векторным управлением в этих переменных имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot z_1^1 = z_2^1, \quad \ldots, \quad \dot z_{n_1-1}^1 = z_{n_1}^1, \quad \dot z_{n_1}^1 = f_1(z,t) + \sum_{j=1}^m g_{1j}(z,t)u_j, \quad \ldots, \\ &\dot z_1^m = z_2^m, \quad \ldots, \quad \dot z_{n_m-1}^m = z_{n_m}^m, \quad \dot z_{n_m}^m = f_m(z,t) + \sum_{j=1}^m g_{mj}(z,t)u_j, \end{aligned} \tag{6.6}$$

где $f(z,t), g(z,t) \in C^\infty(\mathcal{Z}')$, область $\mathcal{Z}' \subset \mathbb{R}^{n+1}$, то ее называют *системой канонического вида*, а переменные z — *каноническими переменными*.

Система (6.6) регулярна тогда и только тогда, когда матрица $(g_{1j}(z,t))$ невырождена во всех рассматриваемых точках.

Аффинной системе (6.3) взаимно однозначно соответствуют гладкие векторные поля

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad j = \overline{1,m} \tag{6.7}$$

с координатными столбцами $\hat A(x,t) = (a_1(x,t), \ldots, a_n(x,t), 1)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}}(x,t), 1)^{\mathrm{T}}$ и $\hat B_j(x,t) = (b_{1j}(x,t), \ldots, b_{nj}(x,t), 0)^{\mathrm{T}} = (B_j^{\mathrm{T}}(x,t), 0)^{\mathrm{T}}$.

С помощью векторных полей (6.7) можно сформулировать следующее необходимое и достаточное условие локальной эквивалентности многомерной аффинной нестационарной системы (6.3) системе (6.6) канонического вида.

Теорема 6.2. [6] Для того, чтобы регулярная аффинная система (6.3) в некоторой окрестности заданной точки $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ была эквивалентна системе вида (6.6), необходимо и достаточно, чтобы в окрестности точки P распределение $\mathcal{F}$, порожденное векторными полями

$$\mathrm{ad}_X^k Y_j, \qquad k = \overline{0, n_j - 2}, \quad j = \overline{1,m},$$

было инволютивным, а векторы

$$\mathrm{ad}_X^k Y_j\Big|_P, \qquad k = \overline{0, n_j - 1}, \quad j = \overline{1,m},$$

были линейно независимыми.

Для того чтобы найти замену переменных $z = z(t,x)$, $t = t$, преобразующую систему (6.3) к виду (6.6), необходимо и достаточно найти первые интегралы $\varphi_j(t,x)$, $j = \overline{1,m}$, распределения $\mathcal{F}$, для которых функции

$$z_k^i = X^{k-1}\varphi_i, \quad k = \overline{1,n_i}, \quad i = \overline{1,m},$$

зависят только от t, x, а матрица $\left(\dfrac{\partial z_k^i(P)}{\partial x_j}\right)$, $k = \overline{1,n_i}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, невырождена.

6.4. Матрица управляемости

Векторные поля $(-1)^k \operatorname{ad}_X^k Y_j$, $k = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{1,m}$, имеют нулевые координаты по $\partial/\partial t$. Обозначим через U_j^k столбец остальных координат векторного поля $(-1)^k \operatorname{ad}_X^k Y_j$ относительно $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$. Отметим, что матрица $B(x,t) = (U_1^0, \ldots, U_m^0)$. Из этих столбцов координат составим матрицы

$$U^i(x,t) = (U_1^0, \ldots, U_m^0, \ldots\ldots, U_1^i, \ldots, U_m^i), \quad i = \overline{0,n-1},$$

размера $n \times m(i+1)$. Столбцы матриц $U^i(x,t)$ удобно вычислять по рекуррентному соотношению

$$(U_1^0, \ldots, U_m^0) = B(x,t), \quad U_j^k = -\left(\frac{\partial U_j^{k-1}}{\partial(x,t)}\hat{A}(x,t) - \frac{\partial A(x,t)}{\partial x}U_j^{k-1}\right), \quad k = \overline{1,n-1}. \tag{6.8}$$

Матрицу $U(x,t) = U^{n-1}(x,t)$ называют *матрицей управляемости* многомерной аффинной нестационарной системы (6.3).

Используя матрицу управляемости, будем искать разложение числа n на m слагаемых: $n_1 + \ldots + n_m = n$ (см. канонический вид), в виде q попарно различных чисел, которые обозначим в порядке убывания через $l_1 > l_2 > \ldots > l_q$, и пусть r_i — "кратность" числа l_i, означающая количество слагаемых в сумме $n_1 + \ldots + n_m$, равных l_i. Иначе говоря, будем искать разложение числа n на m слагаемых в виде $n = r_1 l_1 + \ldots + r_q l_q$.

Числа r_i и l_i удобно находить, заполняя следующую таблицу, в верхней строке (с номером 0) которой указаны формулы для вычисления элементов соответствующего столбца.

i	$\operatorname{Rg} U^{i-1}$	$d_{i3} = \operatorname{Rg} U^{i-1} - \operatorname{Rg} U^{i-2}$	$d_{i4} = d_{i3} - r_1$	$d_{i5} = d_{i4} - r_2$
1	m	m	$m - r_1$	$m - r_1 - r_2$
$\ldots$	$*$	$*$	$*$	$*$
$\ldots$	$*$	$*$	$*$	$*$
i_2	$*$	$*$	$r_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; l_2 = i_2$	0
$\ldots$	$*$	$*$	0	
$\ldots$	$*$	$*$	$\ldots$	
$\ldots$	$*$	$*$	0	
s	n	$r_1 \;\Rightarrow\; l_1 = s$	0	

В первом столбце таблицы стоят номера строк начиная с 1.

Во втором столбце в строке с номером i записан ранг матрицы $U^{i-1}(x,t)$. Следовательно, заполнение второго столбца начинается с числа $m = \operatorname{Rg} U^0(x,t)$ и продолжается до тех пор, пока в строке s не появится число $n = \operatorname{Rg} U^{s-1}(x,t)$. Символ $*$ обозначает в таблице числа, которые появляются в результате ее заполнения.

Третий столбец заполняется по следующему правилу: в i-ой его строке записывается число $d_{i3} = \operatorname{Rg} U^{i-1}(x,t) - \operatorname{Rg} U^{i-2}(x,t)$, считая, что $\operatorname{Rg} U^{-1}(x,t) = 0$. Последний элемент этого столбца тогда равен r_1, а номер строки, в которой он стоит, равен l_1, т.е. $l_1 = s$.

Элементы d_{i4} следующего четвертого столбеца находятся по формуле: $d_{i4} = d_{i3} - r_1$, $i = \overline{1, l_1}$. Последний ненулевой элемент этого столбца тогда равен r_2, а номер строки, в которой он стоит, равен l_2.

Элементы пятого столбца с первого по l_2-й вычисляются аналогично элементам четвертого столбца: $d_{i5} = d_{i4} - r_2$, $i = \overline{1, l_2}$. Последний ненулевой элемент этого столбца тогда равен r_3, а номер строки, в которой он стоит, равен l_3.

Аналогично четвертому столбцу заполняются следующие столбцы таблицы и находятся остальные числа r_i, l_i. Всего в таблице может быть не более чем $m + 2$ ненулевых столбца.

Пример. Предположим, что для аффинной системы с $n = 17$ переменными состояния и $m = 4$ управлениями при $k = \overline{0, 5}$ были вычислены матрицы $U^k(x,t)$ и оказалось, что в окрестности некоторой точки все они инволютивны, их ранги имеют постоянные значения, притом $\operatorname{Rg} U^0(x,t) = 4$, $\operatorname{Rg} U^1(x,t) = 8$, $\operatorname{Rg} U^2(x,t) = 11$, $\operatorname{Rg} U^3(x,t) = 13$, $\operatorname{Rg} U^4(x,t) = 15$, $\operatorname{Rg} U^5(x,t) = 17 = n$.

Для того, чтобы найти разложение числа $n = 17$ на $m = 4$ слагаемых, которое в некоторой окрестности рассматриваемой точки определяет структуру эквивалентной системы канонического вида, заполним 6 столбцов в предыдущей таблице.

i	$\operatorname{Rg} U^{i-1}$	$d_{i3} = \operatorname{Rg} U^{i-1} - \operatorname{Rg} U^{i-2}$	$d_{i4} = d_{i3} - r_1$	$d_{i5} = d_{i4} - r_2$	$d_{i6} = d_{i5} - r_3$
1	4	$4 - 0 = 4$	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1$	$1 - 1 = 0$
2	8	$8 - 4 = 4$	$4 - 2 = 2$	$2 - 1 = 1 = r_3,\ l_3 = 2$	$1 - 1 = 0$
3	11	$11 - 8 = 3$	$3 - 2 = 1 = r_2,\ l_2 = 3$	$1 - 1 = 0$	
4	13	$13 - 11 = 2$	$2 - 2 = 0$		
5	15	$15 - 13 = 2$	$2 - 2 = 0$		
6	17	$17 - 15 = 2 = r_1,\ l_1 = 6$	$2 - 2 = 0$		

В результате находим соответствующее разложение числа 17 на 4 слагаемых: $n = 17 = 2 * 6 + 1 * 3 + 1 * 2 = 6 + 6 + 3 + 2$. Следовательно в окрестности рассматриваемой точки аффинная система эквивалентна регулярной системе канонического вида, которая в канонических переменных состоит из двух уравнений шестого порядка, одного уравнения третьего порядка и одного уравнения второго порядка.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие, $Q \in M$. Ковектор линейного пространства $T_Q M$ называют *ковектором многообразия M в точке Q*. Сопряженное (ковекторное) пространство по отношению к линейному пространству $T_Q M$ называют *кокасательным пространством к многообразию M в точке Q* и обозначают $T^*_Q M$.

Пример 7.1. Пусть f — гладкая функция на многообразии M. Дифференциал df_Q в точке Q есть линейное отображение из $T_Q M$ в $T_{f(Q)}\mathbb{R}$. Пространство $T_{f(Q)}\mathbb{R}$ отождествлется с $\mathbb{R}$. Получаем ковектор в точке Q, который определяется формулой

$$df_Q(\vec{\xi}) = \vec{\xi}(f), \qquad \vec{\xi} \in T_Q M.$$

Задача 7.1 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в окрестности точки Q на многообразии M. Покажите, что ковекторы $dx_{1,Q}, \ldots, dx_{n,Q}$ образуют базис кокасательного пространства $T^*_Q M$ биортогональный базису $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_Q, \ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right|_Q$ касательного пространства $T_Q M$ (см. задачу 2.3).

Множество всех ковекторов многообразия M во всех его точках обозначают T^*M:

$$T^*M = \bigcup_{P \in M} T^*_P M.$$

Рассмотрим отображение $\tau^*\colon T^*M \to M$, которое ковектору в точке Q ставит в соответствие точку Q.

Задача 7.2 Покажите, что
1) T^*M — гладкое многообразие размерности $2\dim M$;
2) отображение $\tau^*\colon T^*M \to M$ есть гладкое отображение многообразий.

Отображение τ^* из задачи 7.2 называют *кокасательным расслоением* многообразия M.

По аналогии с определением векторного поля определяется *ковекторное поле на многообразии* как отображение, которое каждой точке Q многообразия ставит в соответствие ковектор в точке Q.

Пример 7.2. Дифференциал гладкой функции на многообразии M есть ковекторное поле на M.

Задача 7.3 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в окрестности точки Q на многообразии M. Покажите, что любое ковекторное поле ω на многообразии M в окрестности точки Q представляется в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i,$$

где $a_i, i = 1, \ldots, n,$ — функции на M.

Предположим каждой точке Q многообразия M поставлено в соответствие p-форма ω_Q в $T_Q M$. Гладкость отображения $\omega : Q \longmapsto \omega_Q$ определим следующим образом. Каждое такое отображение определяет отображение, которое набору $(X_1, \ldots, X_p)$ векторных полей ставит в соответствие функцию $\omega(X_1, \ldots, X_p) : Q \longmapsto \omega_Q(X_{1,Q}, \ldots, X_{p,Q})$. Отображение ω будем называть *гладким*, если для любых гладких векторных полей $X_1, \ldots, X_p$ на M функция $\omega(X_1, \ldots, X_p)$ гладкая.

Гладкое отображение, которое точке Q многообразия M ставит в соответствие p-форму в $T_Q M$, называют *дифференциальной формой порядка* p (*дифференциальной* p-*формой* или *внешней* p-*формой*). В частности, гладкое ковекторное поле есть дифференциальная 1-форма. Множество всех дифференциальных форм порядка p многообразия M обозначают $\Lambda^p(M)$. Дифференциальные формы порядка 0 многообразия M — это гладкие функции на M, поэтому $\Lambda^0(M) = C^\infty(M)$. Множество всех дифференциальных форм многообразия M обозначают $\Lambda^*(M)$:

$$\Lambda^*(M) = \bigcup_{p \geq 0} \Lambda^p(M).$$

Сложение, умножение на число и внешнее умножение дифференциальных форм на M определяются поточечно: в каждой точке $Q \in M$ надо сложить, умножить на число или внешне перемножить соответствующие внешние формы на касательном пространстве $T_Q M$:

$$(\omega_1 + \omega_2)_Q = \omega_{1,Q} + \omega_{2,Q}, \quad (\lambda\omega)_Q = \lambda\omega_Q, \quad (\omega_1 \wedge \omega_2)_Q = \omega_{1,Q} \wedge \omega_{2,Q}.$$

Аналогично определяется внутреннее произведение $X \rfloor \omega$ векторного поля X и дифференциальной формы ω на M:

$$(X \rfloor \omega)_Q = X_Q \rfloor \omega_Q, \qquad Q \in M.$$

Дифференциальные формы можно умножать не только на числа, но и на гладкие функции:

$$(f\omega)_Q = f(Q)\omega_Q, \qquad f \in C^\infty(M), \quad \omega \in \Lambda^p(M).$$

Множество $\Lambda^p(M)$ дифференциальных p-форм имеет, таким образом, естественную структуру модуля над $\mathbb{R}$-алгеброй $C^\infty(M)$.

Задача 7.4 Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — система координат в окрестности точки Q на многообразии M. Покажите, что любая дифференциальная p-форма ω на многообразии M в окрестности точки Q представляется в виде

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n} a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \qquad a_{i_1 \ldots i_p} \in C^\infty(M). \tag{7.1}$$

Задача 7.5 Как меняется форма (7.1) при переходе к другим координатам $y_1, \ldots, y_n$?

Пусть $F\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий, ω — дифференциальная p-форма на многообразии N. Тогда на многообразии M возникает дифференциальная p-форма, которая обозначается $F^*\omega$ и определяется соотношением

$$(F^*\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p) = \omega(F_*\vec{\xi}_1, \ldots, F_*\vec{\xi}_p), \qquad \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p \in T_P(M), \quad P \in M.$$

Иными словами, значение формы $F^*\omega$ на векторах $\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p$ равно значению формы ω на образах этих векторов.

Задача 7.6 Докажите, что $F^*\omega$ есть дифференциальная p-форма на многообразии M.

Задача 7.7 Докажите, что отображение F^* сохраняет операции над формами:

$$\begin{aligned} F^*(f_1\omega_1 + f_2\omega_2) &= F^*(f_1)F^*(\omega_1) + F^*(f_2)F^*(\omega_2), \quad f_1, f_2 \in C^\infty(M); \\ F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= F^*(\omega_1) \wedge F^*(\omega_2). \end{aligned}$$

Задача 7.8 Пусть $G\colon N \to L$ — второе гладкое отображение многообразий. Докажите, что $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

Задача 7.9 Пусть $F\colon N \to M$ – диффеоморфизм. Докажите формулу

$$F^*(Y \rfloor \omega) = F_*^{-1}(Y) \rfloor F^*(\omega), \qquad Y \in \mathcal{D}(M), \quad \omega \in \Lambda^p(M).$$

Пусть X — векторное поле на многообразии M, $\{A_t\}$ — его фазовый поток, а ω — дифференциальная p-форма. В произвольной точке $P \in M$ определим форму $X(\omega)$ соотношением

$$X(\omega)(\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega(A_{t,*}\vec{\xi}_1, \ldots, A_{t,*}\vec{\xi}_p), \qquad \vec{\xi}_1, \ldots, \vec{\xi}_p \in T_P(M).$$

Задача 7.10 Докажите, что $X(\omega)$ есть дифференциальная p-форма на многообразии M.

Задача 7.11 Докажите формулы

$$\begin{aligned} X(df) &= d(Xf); \\ X \rfloor (\omega_1 \wedge \omega_2) &= X \rfloor \omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^q \omega_1 \wedge X \rfloor \omega_2, \quad \omega_1 \in \Lambda^q(M); \\ X(\omega_1 \wedge \omega_2) &= X(\omega_1) \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge X(\omega_2); \\ X(Y \rfloor \omega) &= [X, Y] \rfloor \omega + Y \rfloor X(\omega). \end{aligned}$$

8. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДЕ РАМА

Рассмотрим задачу следующего типа: для заданной 1-формы ω проверить существует ли, и если существует, найти такую функцию f, что $df = \omega$. Следующая теорема позволяет проверять существование такой функции.

Теорема 8.1. Пусть M — гладкое многообразие размерности n. Существует единственная последовательность отображений

$$C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \to \ldots \to \Lambda^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Lambda^n(M), \tag{8.1}$$

обладающая свойствами:
1) если f — функция, то df — дифференциальная 1-форма, описанная в примере 7.2;
2) $d(df) = 0$;
3) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$;
4) если ω_1 — форма порядка p, то

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Доказательство. Используя задачу 7.4 и свойства 1)–4) из теоремы, для формы (7.1) получаем

$$d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} da_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}. \tag{8.2}$$

Таким образом, свойства 1)–4) однозначно определяют последовательность (8.1), что доказывет ее единственность.

Для доказательства существования достаточно определить d формулой (8.2) и проверить выполнение свойств 1)–4).

Задача 8.1 Завершите доказательство теоремы.

Оператор d, фигурирующий в теореме 8.1, называют *дифференциалом де Рама* (или *внешним дифференцированием*).

Лемма Пуанкаре: $d\omega = 0 \Longrightarrow$ локально $\omega = df$.

Задача 8.2 Докажите следующую координатную формулу для дифференциала внешней 1-формы:

$$d\left(\sum_{i=1}^n a_i dx_i\right) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j.$$

Задача 8.3 Докажите, что для любой дифференциальной формы ω и любых векторных полей X и Y на многообразии M справедливы следующие свойства дифференциала де Рама:
1) $d(d\omega) = 0$, т.е. $d^2 = 0$;
2) $dF^*(\omega) = F^*(d\omega)$ для любого гладкого отображения $F\colon N \to M$;
3) $dX(\omega) = X(d\omega)$;
4) $X(\omega) = X\rfloor(d\omega) + d(X\rfloor\omega)$;
5) $Y\rfloor(X\rfloor d\omega) = Y(X\rfloor\omega) - X\rfloor d(Y\rfloor\omega) - [Y, X]\rfloor\omega$.

Для дифференциальной формы ω порядка 1 формула 5) из задачи 8.3 переписывается в виде

$$Y\rfloor(X\rfloor d\omega) = Y(X\rfloor\omega) - X(Y\rfloor\omega) + [X,Y]\rfloor\omega$$

и называется *инфинитезимальной формулой Стокса* (о мотивировке этого термина см. [4, Рис. 5 и пояснения к нему]).

Задача 8.4 Проверьте инфинитезимальную формулу Стокса, используя координаты и задачу 8.2.

Всякое распределение на многообразии определяет дуальный объект, который называют кораспределением. А именно, для распределения $\mathcal{F}$ на многообразии M в произвольной точке $P \in M$ рассмотрим множество $\mathcal{F}_P^*$ ковекторов, биортогональных подпространству $\mathcal{F}_P$, т.е.

$$\omega \in \mathcal{F}_P^* \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\vec{\xi} \in \mathcal{F}_P \quad \vec{\xi}\rfloor\omega = 0.$$

Из задачи 1.1 следует, что $\mathcal{F}_P^*$ есть подпространство в T_P^*M. Получаем семейство подпространств $\mathcal{F}_P^*$, $P \in M$, которое называют *кораспределением распределения* $\mathcal{F}$.

В общем случае говорят, что на многообразии M задано *кораспределение* $\mathcal{F}^*$, если в каждой точке $P \in M$ задано линейное подпространство $\mathcal{F}_P^*$ кокасательного пространства T_P^*M.

Задача 8.5 Покажите, что всякое кораспределение определяет распределение на том же многообразии.

Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое регулярное распределение на многообразии M, $\mathcal{D}(\mathcal{F})$ — модуль векторных полей, принадлежащих распределению $\mathcal{F}$. Обозначим через $\Lambda^1(\mathcal{F})$ модуль дифференциальных 1-форм, принадлежащих кораспределению распределения $\mathcal{F}$, т.е.

$$\Lambda^1(\mathcal{F}) = \{\omega \in \Lambda^1(M)\colon \forall X \in \mathcal{D}(\mathcal{F}) \quad X\rfloor\omega \equiv 0\}.$$

Задача 8.6 Покажите, что $\Lambda^1(\mathcal{F})$ есть модуль над $C^\infty(M)$.

Обозначим через $\Lambda^1(M)\wedge\Lambda^1(\mathcal{F})$ модуль дифференциальных 2-форм, состоящий из конечных сумм форм вида $\omega_1\wedge\omega_2$, где $\omega_1 \in \Lambda^1(M)$, а $\omega_2 \in \Lambda^1(\mathcal{F})$.

Теорема 8.2 (*теорема Фробениуса, второй вариант*). Гладкое регулярное распределение $\mathcal{F}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда $d\Lambda^1(\mathcal{F}) \subset \Lambda^1(M)\wedge\Lambda^1(\mathcal{F})$, т.е. когда $d\omega \in \Lambda^1(M)\wedge\Lambda^1(\mathcal{F})$, если $\omega \in \Lambda^1(\mathcal{F})$. Так, если 1-формы ω_i, $i = \overline{k+1,\, n}$, порождают модуль $\Lambda^1(\mathcal{F})$, то $\mathcal{F}$ интегрируемо тогда и только тогда, когда существуют такие 1-формы $\alpha_i^j \in \Lambda^1(M)$, что

$$d\omega_i = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_i^j \wedge \omega_j, \qquad i = \overline{k+1,\, n}.$$

Задача 8.7 Докажите теорему 8.2, используя теорему 4.2 и инфинитезимальную формулу Стокса.

Приведем другие формулировки теоремы Фробениуса. Через $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ обозначим множество всех дифференциальных форм, представляющих собой конечные суммы форм вида $\omega_1\wedge\omega_2$, где $\omega_1 \in \Lambda^*(M)$, а $\omega_2 \in \Lambda^1(\mathcal{F})$. Множество $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ называют *идеалом распределения* $\mathcal{F}$.

Задача 8.8 Покажите, что множество $\mathcal{I}(\mathcal{F})$ состоит в точности из таких дифференциальных форм Ω, что Ω_P обращается в нуль на $\mathcal{F}_P$ для всех $P \in M$.

Задача 8.9 Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое регулярное распределение на многообразии, а 1-формы ω_i, $i = \overline{k+1,\, n}$, порождают модуль $\Lambda^1(\mathcal{F})$. Докажите эквивалентность следующих условий:
1) распределение $\mathcal{F}$ интегрируемо;
2) $d\mathcal{I}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{I}(\mathcal{F})$;
3) $d\omega_i \wedge \omega_{k+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0, \qquad i = \overline{k+1,\, n}$.

Теорема Фробениуса дает возможность решать следующую **задачу**:
задан модуль $A = \operatorname{span}_{C^\infty(M)}\{\omega_1, \ldots, \omega_q\}, \omega_1, \ldots, \omega_q \in \Lambda^1(M)$, определить, существует ли для него базис из точных 1-форм, т.е. существуют ли такие функции $f_1, \ldots, f_q$, что

$$A = \operatorname{span}_{C^\infty(M)}\{df_1, \ldots, df_q\}.$$

Задача 8.10 Существуют ли для модулей

$$a)\ \operatorname{span}_{C^\infty(M)}\{dz_1 - z_2dz_3 - z_2dz_4, dz_2\}, \qquad b)\ \operatorname{span}_{C^\infty(M)}\{dz_1 - z_2dz_3 - z_2dz_4, dz_3\}$$

базисы из точных 1-форм

9. КОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Определение и свойства

Рассмотрим регулярную систему с управлением:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m. \tag{9.1}$$

Обозначим через $\alpha^{(i)}$ — i-ю производную функции (дифференциальной формы) α в силу системы (9.1), в частности: $\alpha^{(1)} = \dot{\alpha}, \alpha^{(0)} = \alpha$. Пусть $k^* = n + 2$. Считая переменные

$$t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u_1^{(0)},\ \ldots,\ u_m^{(0)},\ u_1^{(1)},\ \ldots,\ u_m^{(1)},\ u_1^{(2)},\ \ldots,\ u_m^{(k^*)} \tag{9.2}$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. На переменные состояния x, управления u и производные управления системы могут налагаться некоторые ограничения. Обозначим через $\mathcal{E}$ область пространства с координатами (9.2), где определена система (9.1) (векторная функция f) и выполняются все ограничения на переменные системы.

Обозначим через D векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{m} f_\alpha(t, x, u)\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{k=0}^{k^*-1} u_\beta^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial u_\beta^{(k)}}$$

на $\mathcal{E}$. Производная Ли вдоль векторного поля D совпадает с производной в силу системы (9.1) для функций (дифференциальных форм) на $\mathcal{E}$, независящих от $u_\beta^{(k^*)}, \beta = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\mathcal{H}_1$ модуль над $C^\infty(\mathcal{E})$, порожденный 1–формами

$$dt,\ dx_1,\ \ldots,\ dx_n. \tag{9.3}$$

Определим индуктивно множества

$$\mathcal{H}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{H}_k :\ D\omega \in \mathcal{H}_k\}, \quad k \geq 1.$$

Имеем $dt \in \mathcal{H}_i$ для любого $i \geq 1$, так как $D(dt) = 0$.

Пример 9.1. Найдем множества $\mathcal{H}_k$ для системы из примера 6.1:

$$\begin{cases} \dot{x} = u\cos\theta, \\ \dot{y} = u\sin\theta, \\ \dot{\theta} = \dfrac{u}{d}\operatorname{tg}\varphi. \end{cases} \tag{9.4}$$

Важнейшим свойством множеств $\mathcal{H}_k$ является их инвариантность относительно замен переменных состояния. Докажем еще одно свойство.

Теорема 9.1. Для любого $k \geq 0$ множество $\mathcal{H}_k$ есть модуль над $C^\infty(\mathcal{E})$.

Доказательство. Используем индукцию по $k \geq 1$. По определению $\mathcal{H}_1$ есть модуль над $C^\infty(\mathcal{E})$. Предположим $\mathcal{H}_k$ — модуль, $f \in C^\infty(\mathcal{E})$ и $\tau \in \mathcal{H}_{k+1}$. Тогда $\tau \in \mathcal{H}_k$ и $\omega = f\tau \in \mathcal{H}_k$. Кроме того, $D\omega = D(f)\tau + fD(\tau) \in \mathcal{H}_k$. Поэтому согласно определению $\mathcal{H}_{k+1}$ 1-форма $\omega = f\tau$ принадлежит $\mathcal{H}_{k+1}$. А значит, $\mathcal{H}_{k+1}$ есть модуль над $C^\infty(\mathcal{E})$. $\triangleright$

Размерность пространства ковекторов $\{\omega_\theta | \omega \in \mathcal{H}_l\}$ конечна для любых l и $\theta \in \mathcal{E}$. Под размерностью какого–либо $C^\infty(\mathcal{E})$–подмодуля $\mathcal{H} \subset \Lambda^1(\mathcal{E})$ в точке $\theta \in \mathcal{E}$ мы понимаем размерность пространства ковекторов $\{\omega_\theta | \omega \in \mathcal{H}\}$. Через $\dim \mathcal{H}|_\theta$ обозначим размерность модуля $\mathcal{H}$ в точке θ.

Точку $\theta \in \mathcal{E}$ называют *Б–регулярной* точкой системы (9.1), если в некоторой окрестности этой точки система (9.1) регулярна, а для любого $l = 1, \ldots, k^*$ модули $\mathcal{H}_l$ и $\mathcal{H}_l + D(\mathcal{H}_l)$ имеют постоянную размерность.

9.2. Описание модулей $\mathcal{H}_k$ на языке векторных полей

Рассмотрим векторные поля

$$B_\beta = \frac{\partial}{\partial u_\beta^{(0)}}, \qquad \beta = 1, \ldots, m,$$

и $C^\infty(\mathcal{E})$–модули $\mathcal{D}_i$ ($i \geq 1$), порожденные векторными полями

$$B_1,\ \ldots,\ B_m,\ \mathrm{ad}_D B_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_D B_m,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_D^{i-1} B_1,\ \ldots,\ \mathrm{ad}_D^{i-1} B_m,$$

где $\mathrm{ad}_D B_\beta = [D, B_\beta]$ — коммутатор векторных полей, $\mathrm{ad}_D^l B_\beta = [D, \mathrm{ad}_D^{l-1} B_\beta]$. Отметим, что для любого $i \geq 1$ модуль $\mathcal{D}_i$ вместе с полями

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta^{(j)}}, \qquad \beta = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, k^*,$$

порождает распределение $\mathcal{P}_i$ на $\mathcal{E}$. Функция t есть первый интеграл распределения $\mathcal{P}_i$ для любого $i \geq 1$.

Задача 9.1 Найдите распределения $\mathcal{P}_i$ для аффинной системы. Как связана матрица управляемости такой системы с распределениями $\mathcal{P}_i$?

Лемма 9.1. В окрестности Б–регулярной точки для $i \geq 1$ имеем

$$\mathcal{H}_i = \{\omega \in \mathcal{H}_1 \colon \forall X \in \mathcal{D}_i \quad X \rfloor \omega \equiv 0\}.$$

Доказательство. Используем индукцию по i. Обозначим

$$\mathcal{D}_i^T = \{\omega \in \mathcal{H}_1 \colon \forall X \in \mathcal{D}_i \quad X \rfloor \omega \equiv 0\}.$$

Из определений следует, что базисом и $\mathcal{H}_1$, и $\mathcal{D}_1^T$ является набор (9.3). Поэтому $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}_1^T$.

Пусть $\mathcal{H}_{j-1} = \mathcal{D}_{j-1}^T$. Докажем равенство $\mathcal{H}_j = \mathcal{D}_j^T$ методом двух включений. Пусть $\omega \in \mathcal{H}_j$. Тогда $\omega \in \mathcal{H}_{j-1} \subset \mathcal{H}_1$ и $D\omega \in \mathcal{H}_{j-1}$ по определению $\mathcal{H}_j$. Из предположения индукции 1–формы ω и $D\omega$ лежат в $\mathcal{D}_{j-1}^T$. Это означает, что $X \rfloor \omega \equiv 0$ и $X \rfloor D\omega \equiv 0$ для любого векторного поля X из $\mathcal{D}_{j-1}$. Из последнего тождества, используя известную формулу дифференциальной геометрии:

$$X \rfloor D\omega = [X, D] \rfloor \omega + D(X \rfloor \omega), \tag{9.5}$$

получаем $[X,D]\rfloor\omega \equiv 0$. Отсюда $\omega \in \mathcal{D}_j^T$, так как модуль $\mathcal{D}_j$ порождается полями вида $X \in \mathcal{D}_{j-1}$ и $\mathrm{ad}_D X = -[X,D]$. Таким образом доказано, что $\mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{D}_j^T$.

Пусть $\omega \in \mathcal{D}_j^T$. Отметим, что если $X \in \mathcal{D}_{j-1}$, то $[X,D] \in \mathcal{D}_j$. Поэтому

$$\forall X \in \mathcal{D}_{j-1} \quad X\rfloor\omega \equiv 0, \quad [X,D]\rfloor\omega \equiv 0. \tag{9.6}$$

Отсюда и из формулы (9.5) следует, что $X\rfloor D\omega \equiv 0$, т.е. $D\omega \in \mathcal{D}_{j-1}^T$. По предположению индукции $\mathcal{D}_{j-1}^T = \mathcal{H}_{j-1}$. Поэтому $D\omega \in \mathcal{H}_{j-1}$. Из первого тождества в (9.6) следует, что $\omega \in \mathcal{D}_{j-1}^T = \mathcal{H}_{j-1}$. Таким образом, $\omega \in \mathcal{H}_j$, а значит, доказано второе включение $\mathcal{D}_j^T \subseteq \mathcal{H}_j$. $\triangleright$

9.3. Функциональная независимость

Пусть U — открытое подмножество многообразия M, $\mathcal{H}$ — подмодуль модуля дифференциальных 1–форм на M. Набор 1–форм $\omega_1,\ldots,\omega_k$ называется ***базисом модуля*** $\mathcal{H}$ в U, если в каждой точке $x \in U$ ковекторы $\omega_{1,x},\ldots,\omega_{k,x}$ образуют базис линейного пространства $\{\omega_x \in T_x^*M \mid \omega \in \mathcal{H}\}$.

Лемма о дополнении. Если в окрестности точки $\theta \in M$ многообразия M модуль $E = \mathrm{span}_{C^\infty(M)}\{dz_1,\ \ldots, dz_\alpha\}$ имеет постоянную размерность, $\omega_1,\ldots,\omega_s \in E$, а ковекторы $\omega_{1,\theta},\ldots,\omega_{s,\theta}$ линейно независимы, то существуют такие индексы $l_1,\ldots,l_p$ $(1 \le l_i \le \alpha)$, что в некоторой окрестности точки $\theta \in M$ набор $(\omega_1,\ldots,\omega_s,dz_{l_1},\ldots,dz_{l_p})$ есть базис модуля E.

Доказательство. Рассмотрим какую–либо систему координат $x_1,\ldots,x_n$ на M в окрестности точки θ и матрицу коэффициентов разложения ковекторов $\omega_{1,\theta},\ldots,\omega_{s,\theta},dz_{1,\theta}$, $\ldots,dz_{\alpha,\theta}$ по базису $dx_{1,\theta},\ldots,dx_{n,\theta}$ кокасательного пространства $T_\theta^*(M)$. При этом расположим коэффициенты, соответствующие одному ковектору, в строку, а соответствующие одному базисному элементы — в столбец. Поскольку ковекторы $\omega_{1,\theta},\ldots,\omega_{s,\theta}$ линейно независимы, то линейно независимы и строки, соответствующие этим ковекторам. Последовательно перебирая остальные строки, дополняем их до максимального набора линейно независимых строк этой матрицы. Получим набор 1–форм $\omega_1,\ldots,\omega_s,dz_{l_1},\ldots,dz_{l_p}$. Этот набор линейно независим в точке θ, а значит, и в некоторой ее окрестности. Так как модуль E имеет постоянную размерность, а в точке θ указанные 1–формы образуют базис, то они образуют базис и в каждой точке некоторой окрестности θ, т.е. образуют базис модуля E.

Лемма о функциональной зависимости. Пусть $g,z_1,\ldots,z_s$ — гладкие функции на многообразии M, $\theta \in M$,
(1) $dg \in \mathrm{span}_{C^\infty(M)}(dz_1,\ldots,dz_s)$;
(2) ковекторы $dz_{1,\theta},\ldots,dz_{s,\theta}$ линейно независимы.
Тогда существует такая функция Φ s переменных, что $g = \Phi(z_1,\ldots,z_s)$ в окрестности точки θ.

Доказательство. В окрестности точки θ рассмотрим какую–либо систему координат $x_1,\ldots,x_n$ на M. Условия леммы о дополнении выполняются для модуля $E = \mathrm{span}_{C^\infty(M)}\{dz_1,\ldots,\ dz_s,dx_1,\ldots,dx_n\}$ в точке θ. По этой лемме в некоторой окрестности точки θ существует базис модуля E вида $dz_1,\ldots,dz_s,dx_{l_1},\ldots,dx_{l_k}$. Но модуль E есть модуль всех дифференциальных 1–форм на M. Поэтому $s+k=n$ есть размерность многообразия M, а $z_1,\ldots,z_s,x_{l_1},\ldots,x_{l_k}$ — еще одна система координат на M. В этой системе координат рассмотрим представление функции g: $g = \Phi(z_1,\ldots,z_s,x_{l_1},\ldots,x_{l_k})$. Из известной формулы для дифференциала имеем $dg = \Phi'_{z_1}dz_1+\ldots+\Phi'_{z_s}dz_s+\Phi'_{x_{l_1}}dx_{l_1}+\ldots+\Phi'_{x_{l_k}}dx_{l_k}$. С другой стороны, по условию леммы выполняется соотношение (1). Из инвариантности первого дифференциала следует, что это соотношение выполняется в любой системе координат. Поэтому $\Phi'_{x_{l_1}} \equiv 0, \dots, \Phi'_{x_{l_k}} \equiv 0$, а значит, Φ есть функция только от $z_1, \dots, z_s$. Лемма о функциональной зависимости доказана.

Гладкие функции $h_1, \dots, h_k$ многообразия M *функционально зависимы*, если существует такая функции Φ k переменных, что

$$\forall x \in M \quad \Phi\bigl(h_1(x), \dots, h_k(x)\bigr) = 0, \quad d\Phi\bigl(h_1(x), \dots, h_k(x)\bigr) \neq 0.$$

Набор функций многообразия называется *функционально независимым*, если он не является функционально зависимым.

10. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

10.1. Условия приводимости систем с управлением к каноническому виду на языке дифференциальных форм

Для системы (9.1) обозначим

$$\mathcal{H}_\infty = \{\omega \in \mathcal{H}_1 : \ D^i\omega \in \mathcal{H}_1, i \geq 1\}.$$

Рассмотрим регулярную систему канонического вида в фазовых переменных:

$$y_i^{(n_i)} = g_i(t, \tilde{y}, u), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{10.1}$$

где $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m-1)})$.

Теорема 10.1. 1. Система (9.1) приводится к каноническому виду в некоторой окрестности Б–регулярной точки тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки $d\mathcal{H}_k \subset \Lambda^1(\mathcal{E}) \wedge \mathcal{H}_k$ для $k > 1$, а $\mathcal{H}_\infty = \mathrm{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt\}$.
2. Порядки $n_1, \ldots, n_m$ уравнений системы (10.1) таковы, что разности $\dim \mathcal{H}_{k-1} - \dim \mathcal{H}_k$ равны количеству тех номеров i, для которых $n_i \geq k$.

Следующий **алгоритм** позволяет построить замену переменных, преобразующую заданную систему (9.1) к виду (10.1), если это возможно.

1. Для системы (9.1) последовательно для каждого $k > 1$:

а) находим образующие модуля $\mathcal{H}_k$;

б) проверяем условие Фробениуса $d\mathcal{H}_k \subset \Lambda^1(\mathcal{E}) \wedge \mathcal{H}_k$. Если оно не выполняется, то система (9.1) не приводится к каноническому виду;

в) находим базис из точных 1–форм модуля $\mathcal{H}_k$;

г) проверяем условие $\mathcal{H}_k = \mathcal{H}_{k-1}$. Если оно выполняется, то полагаем $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_k$ и переходим на шаг 2.

2. Находим множество Б–регулярных точек и проверяем условие $\mathcal{H}_\infty = \mathrm{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt\}$. Если оно не выполняется, то система (9.1) не приводится к каноническому виду.

3. Дополняем форму dt точными 1–формами $dh_1, \ldots, dh_{m_1}$ $(m_1 \leq m)$ до базиса модуля $\mathcal{H}_{j^*-1}$, используя лемму о дополнении.

4. По построению модуля $\mathcal{H}_{j^*-1}$ 1–формы

$$dt, \ dh_1, \ \ldots, \ dh_{m_1}, \ D(dh_1) = dD(h_1), \ \ldots, \ D(dh_{m_1}) = dD(h_{m_1}) \tag{10.2}$$

$C^\infty(\mathcal{E})$–линейно независимы и лежат в $\mathcal{H}_{j^*-2}$. Дополним их точными 1–формами dh_{m_1+1}, $\ldots$, dh_{m_2} $(m_1 \leq m_2 \leq m)$ до базиса модуля $\mathcal{H}_{j^*-2}$, используя лемму о дополнении. Повторяя эту процедуру (шаг 4) последовательно для модулей $\mathcal{H}_{j^*-3}, \ldots, \mathcal{H}_1$, находим 1–формы $dh_1, \ldots, dh_m$ (имеем $m_{j^*-1} = m$).

5. Замена переменных, преобразующая систему (9.1) к виду (10.1), определяется соотношениями

$$t = t, \quad y_i^{(l)} = D^l\Big(h_i(t,x)\Big), \quad l = 0,\dots,j^*-2,\ i = 1,\dots,m_{j^*-l-1}. \tag{10.3}$$

Теорема 10.2. При выполнении условий из п. 1 теоремы 10.1 алгоритм, приведенный выше, позволяет построить замену переменных, преобразующую систему (9.1) к виду (10.1).

Доказательство теоремы 10.1. Пусть в окрестности Б–регулярной точки система (9.1) приводится к каноническому виду. Модули $\mathcal{H}_k, k \geq 1$, инвариантны относительно замен координат области $\mathcal{E}$, при которых не меняются координаты $t, u_1^{(0)},\dots,u_m^{(0)}, u_1^{(1)},\dots, u_m^{(1)}, u_1^{(2)},\dots,u_m^{(k^*)}$, а меняются только координаты $x_1,\dots,x_n$. Поэтому для доказательства необходимости условия из п.1 и для доказательства п.2 теоремы 10.1 достаточно проверить условия этой теоремы для системы (10.1).

Задача 10.1

1) Проверьте условия теоремы 10.1 для системы (10.1) в случае $m = 2, n_1 = 4, n_2 = 2$.

2) Для общего случая покажите, что $j^* = \max\{n_1,\dots,n_m\} + 1$.

3) Докажите, что для любого $k \geq 1$ в качестве базиса модуля $\mathcal{H}_k$ системы (10.1) можно взять набор dt и таких форм $dy_i^{(l)}$, что индекс i принимает только те значения от 1 до m, что $n_i \geq k$, а $l = 0, 1,\dots,n_i - k$.

Доказательство достаточности условия из п.1 теоремы 10.1 и доказательство теоремы 10.2. Пусть в окрестности Б–регулярной точки $\theta \in \mathcal{E}$ системы (9.1) имеем $d\mathcal{H}_k \subset \Lambda^1(\mathcal{E}) \wedge \mathcal{H}_k$ для $k = 2,\dots,j^*-1$ и $\mathcal{H}_{j^*} = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt\}$. Из теоремы Фробениуса (второй вариант) следует, что интегрируемы распределения, порожденные модулями $\mathcal{H}_k, k = 2,\dots,j^*-1$. Следовательно, модули $\mathcal{H}_k$ имеют базисы из точных 1–форм (первые интегралы распределения). Для доказательства того, что система (9.1) приводится к каноническому виду, и для поиска соответствующей замены переменных применим алгоритм, приведенный выше. Линейная независимость 1–форм (10.2) над кольцом $C^\infty(\mathcal{E})$ следует из определения модулей $\mathcal{H}_k$.

Задача 10.2 Проверьте линейную независимость 1–форм (10.2) над кольцом $C^\infty(\mathcal{E})$.

Применяя лемму о дополнении и алгоритм, строим базис

$$dt,\ dh_1,\ D(dh_1),\ \dots,\ D^{j^*-1}(dh_1),\ dh_2,\ \dots,\ dh_{m_{j^*-1}} \tag{10.4}$$

модуля $\mathcal{H}_1$. Так как $dt, dx_1,\dots,dx_n$ — другой базис этого модуля, то из леммы о функциональной зависимости следует, что переменные $x_1,\dots,x_n$ выражаются через

$$t,\ h_1,\ D(h_1),\ \dots,\ D^{j^*-1}(h_1),\ h_2,\ \dots,\ h_{m_{j^*-1}}, \tag{10.5}$$

а функции (10.5) зависят только от $t, x_1,\dots,x_n$. Получаем замену переменных (10.3).

Из регулярности системы (9.1) следует, что формы

$$D^{j^*}(dh_1),\dots,D^{j^*}(dh_{m_1}), D^{j^*-1}(dh_{m_1+1}),\dots,D(dh_{m_{j^*-1}})$$

вместе с формами (10.4) образуют базис модуля

$$\mathcal{H}_0 = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt,\ dx_1,\ \dots,\ dx_n,\ du_1,\ \dots,\ du_m\}.$$

Отсюда следует, что $m_{j^*-1} = m$, а функции

$$D^{j^*}(h_1), \ldots, D^{j^*}(h_{m_1}), D^{j^*-1}(h_{m_1+1}), \ldots, D(h_{m_{j^*-1}})$$

зависят только от t, x, u или от $t, \tilde{y}, u$. Следовательно, $D(dx_i) = d\dot{x}_i \in \mathcal{H}_0$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, замена переменных (10.3) преобразует систему (9.1) к виду (10.1): $g_1 = D^{j^*}(h_1), \ldots, g_m = D(h_{m_{j^*-1}})$. Теорема полностью доказана. $\triangleright$

10.2. Линеаризация статической обратной связью

Пусть система (9.1) регулярная и приводится к каноническому виду (10.1) заменой переменных

$$t = t, \quad y_i = Y_i(t, x), \quad u_i = u_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10.6}$$

Рассмотрим замену переменных управления:

$$v_i = g_i(t, \tilde{y}, u), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{10.7}$$

где $v = (v_1, \ldots, v_m)$ — новое управление. Так как система (10.1) регулярная, то $\det\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial u_j}\right) \neq 0$. По теореме об обратной функции в некоторой окрестности рассматриваемой точки пространства переменных $t, \tilde{y}, u$ замена (10.7) обратима и переменные u можно выразить через $t, \tilde{y}, v$: $u = \tilde{U}(t, \tilde{y}, v)$. Используя замену переменных (10.3), получаем зависимость $u = U(t, x, v)$, которую называют *статической обратной связью.*

В переменных $t, \tilde{y}, v$ система (10.1) имеет вид

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{10.8}$$

Объединяя замены (10.6) и (10.7), получаем обратимую замену переменных и состояния, и управления:

$$t = t, \quad y_i = Y_i(t, x), \quad v_i = V_i(t, x, u), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{10.9}$$

где

$$V_i(t, x, u) = g_i\left(t, \tilde{Y}(t, x), u\right), \quad i = 1, \ldots, m.$$

При этом замена (10.9) преобразует систему (9.1) к виду (10.8).

Говорят, что система (9.1) *статически линеаризуема в области* $\mathcal{U}$ пространства переменных t, x, u, если в $\mathcal{U}$ существует замена (10.9), которая преобразует систему (9.1) к виду (10.8).

Теорема 10.3. Регулярная система приводится к каноническому виду в окрестности точки пространства переменных системы тогда и только тогда, когда она статически линеаризуема в окрестности этой точки.

Доказательство. То, что система, приводящаяся к каноническому виду, статически линеаризуема, уже доказано. Докажем обратное утверждение.

Пусть система (9.1) статически линеаризуема в окрестности точки θ, а формулы (10.9) определяют соответствующую замену переменных. Предположим, что обратная замена задается соотношениями

$$t = t, \quad x = X(t, \tilde{y}, v), \quad u = \tilde{U}(t, \tilde{y}, v).$$

Тогда имеем векторное тождество $X\big(t, \tilde{Y}(t,x), v\big) = x$. Дифференцируя его по v_i для какого–либо $i = 1, \ldots, m$, получаем

$$\frac{\partial X}{\partial v_i}\big(t, \tilde{Y}(t,x), v\big) = 0.$$

Следовательно, векторная функция X зависит только от $t, \tilde{y}$ и справедливы тождества

$$X\big(t, \tilde{Y}(t,x)\big) = x, \quad \tilde{Y}\big(t, X(t,\tilde{y})\big) = \tilde{y}.$$

Поэтому соотношения (10.6) задают обратимую замену переменных в некоторой окрестности точки θ. Данная замена преобразует систему (9.1) к виду (10.1), где

$$g_i(t, \tilde{y}, u) = V_i\big(t, X(t,\tilde{y}), u\big), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Таким образом, система (9.1) приводится к каноническому виду в окрестности точки θ. $\triangleright$

Теорема Бруновского. [7] Если линейная система $\dot{x} = Ax + Bu$, где A и B — постоянные матрицы, управляема, то она линейным преобразованием приводится к системе вида (10.8).

Системы вида (10.8) называют *каноническими формами Бруновского* для линейных управляемых систем.

11. ДИНАМИЧЕСКИ ЛИНЕАРИЗУЕМЫЕ И ПЛОСКИЕ СИСТЕМЫ

11.1. Понятие динамической обратной связи

Рассмотрим систему с управлением вида

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^m. \tag{11.1}$$

Понятие статической линеаризуемости обобщается следующим образом. *Динамической обратной связью* системы (11.1) называют обратную связь вида

$$\dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \quad u = b(t, x, \xi, v), \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \ v \in \mathbb{R}^m, \tag{11.2}$$

с состоянием ξ, входом (x, v) и выходом u. Область пространства с координатами t, x, ξ, v, где определены функции a и b, называют *областью определения*, а число d — *размерностью динамической обратной связи* (11.2).

Динамическую обратную связь (11.2) можно понимать как преобразование системы (11.1) в систему

$$\dot{x} = f\big(t, x, b(t, x, \xi, v)\big), \qquad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v) \tag{11.3}$$

с состоянием $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+d}$ и управлением (входом) v. Второе равенство в (11.2) определяет отображение из множества решений системы (11.3) в множество решений системы (11.1).

Говорят, что система (11.1) *линеаризуема динамической обратной связью* (11.2) (или просто *динамически линеаризуема*), если получающаяся с помощью этой связи система (11.3) преобразуется в эквивалентную систему вида

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{11.4}$$

обратимой заменой переменных вида

$$t = t, \quad \tilde{y} = \tilde{Y}(t, x, \xi), \quad v = v,$$

где $\tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \ldots, y_m^{(n_m-1)})$ — состояние системы (11.4). В случае $d = 0$, т.е. когда ξ отсутствует, определение динамической линеаризуемости эквивалентно определению статической линеаризуемости.

Теорема 11.1.
1. Если система статически линеаризуема, то она динамически линеаризуема.
2. В случае одномерного управления ($m = 1$) система динамически линеаризуема тогда и только тогда, когда она статически линеаризуема

В случае $m > 1$ существуют системы, которые динамически линеаризуемы, но не статически линеаризуемы.

Пример 11.1. Система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos\theta, \\ \dot{y} &= u \sin\theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{u}{l} \operatorname{tg}\varphi \end{aligned} \tag{11.5}$$

не является статически линеаризуемой, а знпчит, не приводится к каноническому виду. Однако она динамически линеаризуема динамической обратной связью

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v_1 \cos\theta + v_2 \sin\theta, \\ u &= \xi, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{l(v_2 \cos\theta - v_1 \sin\theta)}{\xi^2}. \end{aligned}$$

Получающаяся с помощью этой динамической обратной связи система вида (11.3) заменой переменных $y_1 = x,\ y_2 = y$ преобразуется в эквивалентную систему $\ddot{y}_1 = v_1, \ddot{y}_2 = v_2$. ▷

Задача 11.1 Докажите, что система (11.5) не является статически линеаризуемой.

11.2. Плоские системы

Пусть l — некоторое неотрицательное целое. Считая переменные

$$t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ u_1,\ \ldots,\ u_m,\ \dot{u}_1,\ \ldots,\ \dot{u}_m,\ \ddot{u}_1,\ \ldots,\ u_m^{(l)}$$

независимыми, рассмотрим пространство с такими координатами. Пусть $\mathcal{O}^{(l)}$ — область этого пространства. Система (11.1) называется *плоской* в области $\mathcal{O}^{(l)}$, если на $\mathcal{O}^{(l)}$ определены такие функции

$$y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \quad \ldots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(l)}), \tag{11.6}$$

что переменные x и u выражаются через t, функции (11.6) и их производные в силу системы (11.1) до какого–то конечного порядка, а любой конечный набор функций (11.6), их производных в силу системы (11.1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (11.6) называется *плоским* (или *линеаризующим*) *выходом* системы (11.1).

Задача 11.2 Докажите, что система (11.4) плоская с плоским выходом $(y_1, \ldots, y_m)$.

Теорема 11.2. Линейная система плоская тогда и только тогда, когда она управляема.

Доказательство этой теоремы следует из теоремы Бруновского, задачи 11.2 и инвариантности понятия плоской системы.

Теорема 11.3. Регулярная система (11.1), приводящаяся к каноническому виду

$$y_i^{(n_i)} = g_i(t, \tilde{y}, u), \quad i = 1, \ldots, m,$$

заменой переменных

$$t = t, \quad y_i = Y_i(t, x), \quad u_i = u_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

является плоской с плоским выходом $\big(y_1 = Y_1(t, x), \ldots, y_m = Y_m(t, x)\big)$

Задача 11.3 Докажите теорему 11.3, используя определения.

Теорема 11.4. Если регулярная система (11.1) плоская, то ее управление и плоский выход имеют одинаковую размерность ($r = m$), а для любого $i = 1, \dots, m$ порядок старшей производной функции y_i, входящей в выражение для u, на единицу больше порядка старшей производной y_i из выражения для x:

$$x = X(t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)}), \tag{11.7}$$

$$u = U(t, y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m)}). \tag{11.8}$$

Задачу проверки, является ли заданный набор функций плоским выходом, решает следующая

Теорема 11.5. Пусть система (11.1) регулярная.

1) Если в области $\mathcal{O}^{(l)}$ существуют такие $r = m$ функций (11.6), что переменные состояния $x_1, \dots, x_n$ выражаются через t, функции $y_1, \dots, y_m$ и их производные в силу системы (11.1) до какого-то конечного порядка, то система (11.1) плоская в области $\mathcal{O}^{(l)}$, а функции $y_1, \dots, y_m$ образуют ее плоский выход.

2) Если векторная функция $y = (y_1, \dots, y_m)$ вида (11.6) такова, что переменные x состояния системы (11.1) не выражаются через $t, y, \dot{y}, \dots, y^{(K)}$ при $K = n + (m-1)l - 1$, то x нельзя выразить через $t, y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}$ ни для какого k, т.е. y не является плоским выходом системы (11.1).

Полученную в теореме оценку для K нельзя улучшить. А именно, для любых n, m, l можно построить примеры плоских систем и плоских выходов, для которых K будет равен указанной в теореме оценке.

Пример 11.2. Система (11.5) регулярная и плоская в области $\{u \neq 0\}$ с плоским выходом $y_1 = x$, $y_2 = z$. Плоскостность следует из утверждения 1) теоремы 11.5, так как $u^2 = \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2$, а при $\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 \neq 0$ имеем

$$x = y_1, \quad z = y_2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{\dot{y}_2}{\dot{y}_1}, \quad \text{когда} \quad \dot{y}_1 \neq 0, \quad \text{и} \quad \theta = \operatorname{arcctg} \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}, \quad \text{когда} \quad \dot{y}_2 \neq 0.$$

11.3. Построение динамической обратной связи, линеаризующей плоскую систему

Каждое решение системы вида (11.4) однозначно определяется функциями $y_1(t), \dots, y_m(t)$, которые могут быть выбраны произвольными ($v_i(t) = y_i^{(n_i)}(t)$). Таким образом, соотношения (11.6) при $r = m$ определяют отображение из множества решений системы (11.1) во множество решений системы (11.4). Это отображение есть биекция, если (11.6) – плоский выход системы (11.1). Действительно, сюръективность этого отображения следует из функциональной независимости любого конечного набора функций (11.6), их производных и t, а соотношения (11.7) и (11.8) задают обратное отображение.

Теорема 11.6. Пусть в области $\mathcal{O}^{(l)}$ регулярная система (11.1) плоская с плоским выходом (11.6) и имеет место равенство (11.7). Тогда в окрестности любой точки $\theta_l \in \mathcal{O}^{(l)}$ существует динамическая обратная связь размерности $d = n_1 + \ldots + n_m - n$, которая линеаризует систему (11.1).

Динамическая обратная связь, линеаризующая плоскую систему, может быть построена с помощью следующего **алгоритма**.

Пусть функции (11.6) образуют плоский выход системы (11.1) и выполняются соотношения (11.7).

1. Выберем функции $\xi_1, \dots, \xi_d$ переменных $t,\ \tilde{y} = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(n_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(n_m-1)})$ так, чтобы матрица Якоби $\partial(\xi, X)/\partial\tilde{y}$ была квадратной и невырожденной.

2. Выразим производные $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_d$ этих функций в силу системы (11.1) и функции $u_1, \dots, u_m$ через $t,\ \tilde{y}$ и $v = (v_1, \dots, v_m)$, где $v_i = y_i^{(n_i)}$, $i = \overline{1, m}$.

3. В полученных выражениях для $\dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_d$ и $u_1, \dots, u_m$ перейдем от переменных $t,\ \tilde{y},\ v$ к переменным $t,\ \xi,\ x,\ v$. Получим линеаризующую динамическую обратную связь.

Пример 11.3. Переменные состояния системы (11.5) выражаются через $t,\ \tilde{y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2)$. Поэтому $n_1 = n_2 = 2$, $d = 1$. Выберем функцию ξ переменных $t,\ \tilde{y}$ так, чтобы переход от переменных $t,\ x,\ z,\ \theta,\ \xi$ к переменным $t,\ \tilde{y}$ был обратим. Положим $\xi = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}$. Тогда $\dot{y}_1$ и $\dot{y}_2$ выражаются через θ и ξ: $\dot{y}_1 = \xi \cos\theta$, $\dot{y}_2 = \xi \sin\theta$. Выразим $\dot{\xi},\ u,\ \varphi$ через $t,\ \tilde{y},\ \ddot{y}_1, \ddot{y}_2$. В случае $u > 0$ получаем:

$$\dot{\xi} = \frac{\ddot{y}_1\dot{y}_1 + \ddot{y}_2\dot{y}_2}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{1/2}}, \quad u = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{l(\ddot{y}_2\dot{y}_1 - \ddot{y}_1\dot{y}_2)}{(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)^{3/2}}.$$

Переходя к переменным $t,\ x,\ z,\ \theta,\ \xi,\ v_1 = \ddot{y}_1,\ v_2 = \ddot{y}_2$, получаем линеаризующую динамическую обратную связь

$$u = \xi, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{l}{\xi^2}(v_2\cos\theta - v_1\sin\theta), \quad \dot{\xi} = v_1\cos\theta + v_2\sin\theta$$

с областью определения $\{u \neq 0\}$. Обратное отображение из множества решений системы (11.5) во множество решений линейной системы $\ddot{y}_1 = v_1$, $\ddot{y}_2 = v_2$ имеет вид

$$t = t \quad y_1 = x, \quad y_2 = z, \quad v_1 = \dot{u}\cos\theta - \frac{u^2}{l}\operatorname{tg}\varphi\sin\theta, \quad v_2 = \dot{u}\sin\theta + \frac{u^2}{l}\operatorname{tg}\varphi\cos\theta.$$

Замечание 1. Из соотношений (11.7) и (11.8) следует, что состояние x плоской системы (11.1) выражается через время t и состояние $\tilde{y}$ линейной системы (11.4), а управление u – через $t,\ \tilde{y}$ и управление v системы (11.4). Однако обратное отображение может не обладать этим свойством, т.е. выражения для $\tilde{y},\ v$ могут содержать $t,\ x,\ u$ и производные $\dot{u}, \dots, u^{(k)}$ до некоторого порядка k. Так, в рассматриваемом выше примере управление (v_1, v_2) линейной системы выражается через состояние θ, управление (u, φ) и производную $\dot{u}$. Таким образом, чтобы представить преобразование плоской системы (11.1) к виду (11.4) как обратимое отображение областей пространств, необходимо рассматривать пространства бесконечной размерности, координатами которых являются время, состояния, управление и все производные управления.

12. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

12.1. Решение задач терминального управления и стабилизации

Рассмотрим механическую систему, описываемую системой (11.1). Предположим, мы нашли функцию управления $u_*(t)$, которая позволяет нам следовать выбранной траектории $x_*(t)$. Но какие–либо случайные внешние воздействия, не учитываемые системой (11.1), изменили функцию состояния системы на $x(t)$, причем $x(t_0) \neq x_*(t_0)$ в некоторый момент $t = t_0$. В этом случае для возвращения на заданную траекторию $x_*(t)$ управление выбирается как решение *задачи стабилизации*.

В классической формулировке эта задача заключается в поиске такой обратной связи $u = U(t,x)$, что $x = x_*(t)$ есть асимптотически устойчивое решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f\big(t, x, U(t,x)\big)$. *Динамический* вариант формулировки требует найти такую динамическую обратную связь (11.2) и векторную функцию $v = V(t,x,\xi)$, чтобы для некоторой векторной функции $\xi_*(t)$ набор $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ был асимптотически устойчивым решением системы

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= f\Big(t, x, b\big(t, x, \xi, V(t,x,\xi)\big)\Big),\\
\dot{\xi} &= a\big(t, x, \xi, V(t,x,\xi)\big).
\end{aligned} \tag{12.1}
$$

Для возвращения на заданную траекторию $x_*(t)$ в описанной выше ситуации управление вычисляется по формуле

$$u = b\Big(t, \xi(t), x(t), V\big(t, x(t), \xi(t)\big)\Big),$$

где $x(t)$ — состояние системы в момент t, а $\xi(t)$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = a\Big(t, \xi, x(t), V\big(t, x(t), \xi\big)\Big)$$

с начальным условием $\xi(t_0) = \xi_*(t_0)$. Тогда в случае отсутствия внешних воздействий при $t > t_0$ функция состояний $x(t)$ вместе с функцией $\xi(t)$ образуют решение системы (12.1), которое в случае близости $x(t_0)$ к $x_*(t_0)$ стремится к решению $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ при $t \to \infty$ в виду устойчивости последнего. А значит, $x(t)$ стремится к $x_*(t)$.

Пусть система (11.1) линеаризуема динамической обратной связью (11.2) и для нее поставлена задача терминального управления:

$$x(t_{\text{Н}}) = x_{\text{Н}}, \quad x(t_{\text{К}}) = x_{\text{К}}. \tag{12.2}$$

Покажем как решаются поставленные задачи для таких систем. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f\big(t, x, b(t,x,\xi,v)\big), \qquad \dot{\xi} = a(t, x, \xi, v), \tag{12.3}$$

в которую преобразуется система (11.1) после применения динамической обратной связи (11.2). Для вектора ξ дополнительных переменных зададим произвольные (например, нулевые) начальное ($\xi_{\text{Н}}$) и конечное ($\xi_{\text{К}}$) значения и рассмотрим для системы (12.3) задачу терминального управления:

$$x(t_{\text{Н}}) = x_{\text{Н}}, \quad \xi(t_{\text{Н}}) = \xi_{\text{Н}}, \quad x(t_{\text{К}}) = x_{\text{К}}, \quad \xi(t_{\text{К}}) = \xi_{\text{К}}. \tag{12.4}$$

По определению динамической линеаризуемости система (12.3) обратимой заменой переменных вида

$$t = t, \quad \tilde{y} = \tilde{Y}(t, x, \xi), \quad v = v \tag{12.5}$$

преобразуется в эквивалентную систему

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{12.6}$$

Применяя преобразование (12.5), получаем для системы (12.6) задачу

$$\tilde{y}(t_{\text{Н}}) = \tilde{Y}(t_{\text{Н}}, x_{\text{Н}}, \xi_{\text{Н}}), \quad \tilde{y}(t_{\text{К}}) = \tilde{Y}(t_{\text{К}}, x_{\text{К}}, \xi_{\text{К}}). \tag{12.7}$$

Решение этой задачи и соответствующей задачи стабилизации хорошо известно [6]. Например, существует решение $\big(y_*(t), v_*(t)\big)$ системы (12.6), удовлетворяющее условиям (12.7), в виде многочленов по t:

$$y_{*,i}(t) = \sum_{s=0}^{2n_i-1} a_{i,s} t^s, \quad v_{*,i}(t) = (y_{*,i}(t))^{(n_i)}, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{12.8}$$

где коэффициенты $\{a_{i,s}\}$ находятся из системы уравнений (12.7). Эта система состоит из линейных уравнений на $\{a_{i,s}\}$, и в случае $t_{\text{К}} \neq t_{\text{Н}}$ матрица системы невырожденна. Поэтому система имеет единственное решение.

Применяя замену переменных

$$t = t, \quad x = X(t, \tilde{y}), \quad \xi = \Xi(t, \tilde{y}), \quad v = v, \tag{12.9}$$

обратную к замене (12.5), получаем из решения $\big(y_*(t), v_*(t)\big)$ решение $\big(x_*(t), \xi_*(t), v_*(t)\big)$ системы (12.3). Это решение удовлетворяет условиям (12.4) в виду взаимной обратимости замен (12.5) и (12.9). Таким образом, зависимость

$$u_*(t) = b\big(t, \xi_*(t), x_*(t), v_*(t)\big), \quad t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}],$$

решает задачу терминального управления (12.2).

Для решения соответствующей задачи стабилизации построим обратную связь

$$v_i = \big(y_{*,i}(t)\big)^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} \left(y_i^{(j)} - \big(y_{*,i}(t)\big)^{(j)}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{12.10}$$

где постоянные коэффициенты $\gamma_{i,j}$ находятся из условия асимптотической устойчивости следующей линейной системы дифферениальных уравнений

$$e_i^{(n_i)} = \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} e_i^{(j)}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Обратная связь (12.10) дает решение задачи стабилизации системы (12.6), так как получающаяся с помощью нее система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$y_i^{(n_i)} = \big(y_{*,i}(t)\big)^{(n_i)} + \sum_{j=0}^{n_i-1} \gamma_{i,j} \left(y_i^{(j)} - \big(y_{*,i}(t)\big)^{(j)}\right), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{12.11}$$

а значит, $y_*(t)$ есть асимптотически устойчивое решение этой системы.

Обозначим через $v = V(t, \tilde{y})$ функцию (12.10). Замена переменных

$$t = t, \quad x = X(t, \tilde{y}), \quad \xi = \Xi(t, \tilde{y}),$$

полученная из замены (12.9) удалением v, преобразует решение $y_*(t)$ системы (12.11) в решение $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\Big(t, x, b\big(t, x, \xi, V(t, Y(t, x, \xi))\big)\Big), \\ \dot{\xi} &= a\Big(t, x, \xi, V\big(t, Y(t, x, \xi)\big)\Big). \end{aligned}$$

Примеры показывают (см. [8] и ссылки там), что очень часто решение $\big(x_*(t), \xi_*(t)\big)$ последней системы тоже асимптотически устойчиво. В этом случае динамическая обратная связь (11.2) и векторная функция $v = V\big(t, Y(t, x, \xi)\big)$ решают задачу стабилизации для системы (11.1). При этом подбор коэффициентов $\gamma_{i,j}$ в (12.11) позволяет регулировать скорость возвращения системы на заданную траекторию $x_*(t)$.

12.2. Управление движением самолета вертикального взлета

Рассмотрим движение самолета вертикального взлета на этапе выполнения предпосадочных маневров. Используем упрощенную модель [8], которая учитывает только движение в вертикальной плоскости, перпендикулярной продольной оси. Это движение описывает система уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u_1 \sin\theta - \varepsilon u_2 \cos\theta, \\ \ddot{z} &= u_1 \cos\theta + \varepsilon u_2 \sin\theta - 1, \\ \ddot{\theta} &= u_2, \end{aligned} \tag{12.12}$$

где x и z — нормированные координаты центра масс самолета по горизонтальной и вертикальной осям соответственно, θ — угол крена, v_x, v_z, v_θ — соответствующие скорости, u_1 — управление, пропорциональное сумме тяг двигателей, u_2 — управление, пропорционально разности тяг двух двигателей, ε — малая константа. Вектор с координатами

$$x,\ v_x = \dot{x},\ z,\ v_z = \dot{z},\ \theta,\ v_\theta = \dot{\theta}$$

задает состояние системы, вектор (u_1, u_2) — ее управление.

Система (12.12) регулярна во всем пространстве, а в точках, где $v_\theta \neq 0$ и $u_1 - \varepsilon v_\theta^2 \neq 0$, она плоская, и функции

$$y_1 = x + \varepsilon \sin\theta, \qquad y_2 = z + \varepsilon \cos\theta$$

образуют ее плоский выход. Действительно, в указанных точках имеем

$$\begin{aligned} x &= y_1 - \varepsilon \frac{\ddot{y}_1}{\sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}}, \\ z &= y_2 - \varepsilon \frac{\ddot{y}_2 + 1}{\sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\ddot{y}_1}{\ddot{y}_2 + 1}. \end{aligned}$$

Так как v_x, v_z, v_θ — производные в силу системы (12.12) функций x, z, θ соответственно, то переменные v_x, v_z, v_θ также выражаются через y_1, y_2 и их производные. Плоскостность системы (12.12) следует из теоремы 11.5.

Построим динамическую обратную связь, линеаризующую систему (12.12). Переменные состояния системы (12.12) выражаются через $t, \tilde{y} = (y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \dddot{y}_1, \dddot{y}_2)$. Выберем такие две функции ξ_1, ξ_2 переменных $t, \tilde{y}$, чтобы переход от переменных $t, x, z, \theta, v_x, v_z, v_\theta, \xi_1, \xi_2$ к переменным $t, \tilde{y}$ был обратим. Положим:

$$\xi_1 = \sqrt{(\ddot{y}_1)^2 + (\ddot{y}_2 + 1)^2}, \qquad \xi_2 = \dot{\xi}_1.$$

Тогда $\ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$ выражаются через θ и ξ_1:

$$\ddot{y}_1 = \xi_1 \sin\theta, \qquad \ddot{y}_2 = -1 + \xi_1 \cos\theta,$$

и, значит, y_1, y_2 выражаются через x, z, θ, ξ_1, а $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dddot{y}_1, \dddot{y}_2$ — через производные полученных выражений для $y_1, y_2, \ddot{y}_1$ и $\ddot{y}_2$. Выражая $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, u_1, u_2$ через $t, \tilde{y}, v_1 = y_1^{(4)}, v_2 = y_2^{(4)}$, а потом переходя к переменным t, ξ, x, v, получаем динамическую обратную связь

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= v_1 \sin\theta + v_2 \cos\theta + v_\theta^2 \xi_1, \\ u_1 &= \xi_1 + \varepsilon v_\theta^2, \\ u_2 &= \frac{1}{\xi_1} \left(v_1 \cos\theta - v_2 \sin\theta - 2 v_\theta \xi_2 \right), \end{aligned}$$

которая линеаризует систему (12.12).

С целью демонстрации изложенного выше метода положим $\varepsilon = 1$ и решим следующую задачу терминального управления для системы (12.12):

$$\begin{array}{llll} x(0) = 10, & z(0) = 5, & \theta(0) = 0, & v_x(0) = -10, \\ v_z(0) = -5, & v_\theta(0) = 0, & x(1) = 0, & z(1) = 0, \\ \theta(1) = 0, & v_x(1) = -10, & v_z(1) = -5, & v_\theta(1) = 0. \end{array} \tag{12.13}$$

Начальные и конечные значения дополнительных переменных ξ_1, ξ_2 зададим следующим образом:

$$\xi_1(0) = 1 = \xi_1(1), \qquad \xi_2(0) = 0 = \xi_2(1).$$

Тогда соответствующая задача терминального управления для линейной системы имеет вид:

$$\begin{array}{llll} y_1(0) = 10, & y_2(0) = 6, & \dot{y}_1(0) = -10, & \dot{y}_2(0) = -5, \\ \ddot{y}_1(0) = 0, & \ddot{y}_2(0) = 0, & \dddot{y}_1(0) = 0, & \dddot{y}_2(0) = 0, \\ y_1(1) = 0, & y_2(1) = 1, & \dot{y}_1(1) = -10, & \dot{y}_2(1) = -5, \\ \ddot{y}_1(1) = 0, & \ddot{y}_2(1) = 0, & \dddot{y}_1(1) = 0, & \dddot{y}_2(1) = 0. \end{array}$$

Решение этой задачи в пространстве многочленов порядка 7 есть

$$y_{*,1}(t) = -10t + 10, \qquad y_{*,2}(t) = -5t + 6.$$

Для решения соответствующей задачи стабилизации рассмотрим следующую устойчивую систему дифференицальных уравнений

$$e_i^{(4)} = -4 \dddot{e}_i - 6\ddot{e}_i - 4\dot{e}_i - e_i, \qquad i = 1, 2.$$

Соответствующая стабилизирующая обратная связь имеет вид

$$\begin{aligned} v_1 &= -4\dddot{y}_1 - 6\ddot{y}_1 - 4(\dot{y}_1 + 10) - (y_1 + 10t - 10), \\ v_2 &= -4\dddot{y}_2 - 6\ddot{y}_2 - 4(\dot{y}_2 + 5) - (y_2 + 5t - 6). \end{aligned}$$

Возвращаясь к системе (12.12) с $\varepsilon = 1$, получаем решение $u_1 = 1, u_2 = 0$ задачи (12.13) и решение задачи стабилизации:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_1 \left(v_\theta^2 - 6\right) - 4\xi_2 - 1 - \sin\theta(4v_x + x + 10t + 30) - \\ &\qquad - \cos\theta(4v_z + z + 5t + 8), \\ u_1 &= \xi_1 + v_\theta^2, \\ u_2 &= -4v_\theta - 4\frac{v_\theta}{\xi_1} - 2\frac{\xi_2 v_\theta}{\xi_1} - \frac{\cos\theta}{\xi_1}(4v_x + x + 10t + 30) + \\ &\qquad + \frac{\sin\theta}{\xi_1}(4v_z + z + 5t + 8). \end{aligned}$$

При этом желаемая траектория есть

$$x_*(t) = -10t + 10, \quad z_*(t) = -5t + 5, \quad \theta_*(t) = 0.$$

Задача. Опишите решение задач терминального управления и стабилизации для модели автомобиля.

13. УПРАВЛЯЕМОСТЬ, ДОСТИЖИМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ СИСТЕМ

13.1. Первые интегралы систем

Пусть задана система

$$\dot{x} = f(x, u), \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \tag{13.1}$$

Множество D называется *областью допустимых состояний*, а множество U — *областью допустимых управлений* системы.

Состояние $x_{\text{К}} \in D$ называют *достижимым из состояния* $x_{\text{Н}} \in D$ в области D, если существует решение $(x(t), u(t))$, $t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}]$, системы (13.1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} &x|_{t=t_{\text{Н}}} = x_{\text{Н}}, \qquad x|_{t=t_{\text{К}}} = x_{\text{К}}, \\ &x(t) \in D, \quad u(t) \in U \quad \text{при} \quad t \in [t_{\text{Н}}, t_{\text{К}}]. \end{aligned}$$

Систему (13.1) называют *управляемой в области* D, если любое состояние $x_{\text{К}} \in D$ достижимо из любого состояния $x_{\text{Н}} \in D$ в области D.

Для формулировки условий управляемости и достижимости необходимо получить описание первых интегралов систем.

Функцию $g(t, x, u, \dot{u}, \ldots, u^{(r)})$ называют *первым интегралом системы* (13.1) если производная этой функции в силу системы (13.1) тождественно равна нулю.

Теорема 13.1. Первый интеграл системы (13.1) может зависеть только от переменных $t, x_1, \ldots, x_n$.

Обозначим

$$\mathcal{H}_\infty = \{\omega \in \mathcal{H}_1 : \ \forall i \in \mathbb{N} \quad \omega^{(i)} \in \mathcal{H}_1\},$$

где $\omega^{(i)}$ — i-ая производная в силу системы (13.1) дифференциальной формы ω.

Теорема 13.2. В окрестности Б–регулярной точки

(a) существует такое натуральное $j^* \le n + 2$, что $\mathcal{H}_{j^*+1} = \mathcal{H}_{j^*}$;

(b) $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}_{j^*} = \operatorname{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt, dg_1, \ldots, dg_\rho\}$,

где $g_1, \ldots, g_\rho$ — максимальный набор функционально независимых первых интегралов системы (13.1).

Доказательство (a). Модуль $\mathcal{H}_1$ порождается 1–формами (9.3). Поэтому $\dim \mathcal{H}_1|_\theta = n + 1$. Так как для всех j мы имеем вложение $\mathcal{H}_{j+1} \subset \mathcal{H}_j$, то размерность модуля $\mathcal{H}_j$ не возрастает с ростом j. Обозначим через j^* такое максимальное натуральное число, что $\dim \mathcal{H}_j|_\theta < \dim \mathcal{H}_{j-1}|_\theta$ при $j = \overline{1, j^*}$. Тогда $\dim \mathcal{H}_{j^*+1}|_\theta = \dim \mathcal{H}_{j^*}|_\theta$, а $\dim \mathcal{H}_1|_\theta - \dim \mathcal{H}_{j^*}|_\theta \ge j^* - 1$. Поэтому $\dim \mathcal{H}_{j^*}|_\theta \le \dim \mathcal{H}_1|_\theta - j^* + 1 = n + 2 - j^*$. Так как $dt \in \mathcal{H}_i$ для любого $i \ge 0$, то $\dim \mathcal{H}_{j^*}|_\theta \ge 1$. Следовательно, $n + 2 - j^* \ge 1$ и $j^* \le n + 1$. В окрестности Б–регулярной точки θ модули $\mathcal{H}_{j^*+1}$ и $\mathcal{H}_{j^*}$ имеют постоянную размерность, а значит, $\mathcal{H}_{j^*+1} = \mathcal{H}_{j^*}$ в этой окрестности. Используя индукцию по j и определение $\mathcal{H}_j$, получаем $\mathcal{H}_j = \mathcal{H}_{j^*}$ для всех $j > j^*$ в указанной окрестности точки θ. $\triangleright$

13.2. Условия управляемости и достижимости

Определим ранговое условие управляемости для систем вида (13.1). Отметим, что для любого $i \geq 1$ модуль $\mathcal{D}_i$ (см. п. 9.2) лежит в модуле $\mathcal{D}_+$, порожденном полями

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial u_1^{(0)}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial u_m^{(0)}}.$$

Говорят, что система (13.1) удовлетворяет *ранговому условию управляемости*, если для некоторого $i > 1$ распределение $\mathcal{D}_i$ совпадает с распределением $\mathcal{D}_+$.

Теорема 13.3. Если система (13.1) удовлетворяет ранговому условию управляемости, то она не имеет первых интегралов, т.е. $\mathcal{H}_\infty = \mathrm{span}_{C^\infty(\mathcal{E})}\{dt\}$. Если система (13.1) не удовлетворяет ранговому условию управляемости, то она имеет первые интегралы в окрестности любой Б–регулярной точки.

Теорема 13.4. Если система (13.1) управляема на множестве D, то она не имеет первых интегралов и удовлетворяет ранговому условию управляемости.

Теорема 13.5. **(Локальное условие достижимости)** Если в точке x_0 система (13.1) удовлетворяет ранговому условию управляемости, а $(x_*(t), u_*(t))$ — решение этой системы и $x_*(t_0) = x_0$, то существует такое $\Delta > 0$ и окресность $V \subset D$ точки $x_*(t_0 + \Delta)$, что V достижимо из точки x_0.

Теорема 13.6. **(Локальное условия управляемости)** Если $(x_*(t), u_*(t))$ — периодическое решение системs (13.1), $x_*(t_0+T) = x_*(t_0)$ для некоторого $T > 0$, и система (13.1) удовлетворяет ранговому условию управляемости в окрестности кривой $x = x_*(t), t \in [t_0, t_0 + T]$, то существует окрестность этой кривой, в которой система (13.1) управляема.

Задача 13.1 Проверьте ранговое условие управляемости для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ln(x_2^3 + 2x_1) + x_2^2 u.$$

13.3. Наблюдаемость систем

Система с входом и выходом

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n,\ u \in U \subset \mathbb{R}^m, \tag{13.2}$$
$$y = h(x), \quad y \in \mathbb{R}^p, \tag{13.3}$$

наблюдаема, если ее функцию состояния $x(t)$ можно восстановить по результатам измерения функции выхода $y(t)$.

Неполная наблюдаемость: можно восстановить часть компонентов вектора состояния.

Пусть V — подмножество множества D допустимых состояний. Состояние $a \in V$ называют *неотличимым* в V от состояния $b \in V$, если

$$\begin{array}{l} \forall t \in [t_0, T] \quad x_*(t) \in V, \quad x_\#(t) \in V, \quad u(t) \in U \\ \dot{x}_*(t) = f(x_*(t), u(t)), \quad x_*(t_0) = a, \quad y_*(t) = h(x_*(t)) \\ \dot{x}_\#(t) = f(x_\#(t), u(t)), \quad x_\#(t_0) = b, \quad y_\#(t) = h(x_\#(t)) \end{array} \implies \begin{array}{l} \forall t \in [t_0, T] \\ y_*(t) = y_\#(t). \end{array}$$

Систему (13.2)-(13.3) называют *локально наблюдаемой* в области $M \times U$ $(M \subset D)$, если любая точка $a \in M$ имеет окрестность, в которой нет неотличимых от a состояний.

Теорема 13.7. **(Условия локальной наблюдаемости.)** Система (13.2)-(13.3) локально наблюдаема в области $M \times U$ $\Leftrightarrow$ в любой точке $(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n-2)})$ области $M \times U \times \mathbb{R}^{m(n-2)}$ имеем

$$\operatorname{Rg}\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial D(h)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial D^{n-1}(h)}{\partial x}\right) = n, \tag{13.4}$$

где

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + f(x, u)\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{n-2} u^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u^{(i)}}$$

— производная в силу системы (13.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Едиториал УРСС, 2003.— 416 с.

[2] Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. — 336 с.

[3] Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 456 с.

[4] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. — М.: Мир, 1970.— 412 с.

[5] Морозова В.Д. Введение в анализ. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. — 331с.

[6] Краснощеченко В. И., Крищенко А. П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. — М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. — 520 с.

[7] Brunovský P. A classification of linear controllable systems // Kybernetica. — 1970. — V. 6. — P. 176–188.

[8] Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Control. — 1999. — V. 44, № 5. — P. 922–937.