

**Математический анализ, 1-й семестр,
ИУ, РЛ (кроме ИУ9) (2022-23 уч.г.)
Рубежный контроль 1
Вопросы для подготовки**

Теоретические вопросы (определения)¹

1. (1 балл) Сформулируйте определение окрестности точки $x \in \mathbb{R}$ [2].
2. (1 балл) Сформулируйте определение ε -окрестности точки $x \in \mathbb{R}$ [2].
3. (1 балл) Сформулируйте определение окрестности $+\infty$ [2].
4. (1 балл) Сформулируйте определение окрестности $-\infty$ [2].
5. (1 балл) Сформулируйте определение окрестности ∞ [2].
6. (1 балл) Сформулируйте определение предела последовательности [4].
7. (1 балл) Сформулируйте определение сходящейся последовательности [4].
8. (1 балл) Сформулируйте определение ограниченной последовательности [4].
9. (1 балл) Сформулируйте определение монотонной последовательности [3,4].
10. (1 балл) Сформулируйте определение возрастающей последовательности [3,4].
11. (1 балл) Сформулируйте определение убывающей последовательности [3,4].
12. (1 балл) Сформулируйте определение невозрастающей последовательности [3,4].
13. (1 балл) Сформулируйте определение неубывающей последовательности [3,4].
14. (1 балл) Сформулируйте определение фундаментальной последовательности [4].
15. Сформулируйте критерий Коши существования предела последовательности [4].
16. (1 балл) Сформулируйте определение по Гейне предела функции [5].
17. (1 балл) Сформулируйте определение бесконечно малой функции [7].
18. (1 балл) Сформулируйте определение бесконечно большой функции [7].
19. (1 балл) Сформулируйте определение бесконечно малых функций одного порядка [8].
20. (1 балл) Сформулируйте определение несравнимых бесконечно малых функций [8].
21. (1 балл) Сформулируйте определение эквивалентных бесконечно малых функций [8].
22. (1 балл) Сформулируйте определение порядка малости одной функции относительно другой [8].
23. (1 балл) Сформулируйте определение приращения функции [9].
24. (1 балл) Сформулируйте определение непрерывности функции в точке (любое) [9].
25. (1 балл) Сформулируйте определение непрерывности функции на интервале [9].
26. (1 балл) Сформулируйте определение непрерывности функции на отрезке [9].
27. (1 балл) Сформулируйте определение точки разрыва [9].
28. (1 балл) Сформулируйте определение точки устранимого разрыва [9].
29. (1 балл) Сформулируйте определение точки разрыва I рода [9].
30. (1 балл) Сформулируйте определение точки разрыва II рода [9].

¹В квадратных скобках указаны номера лекций по календарному плану, см. также Иванков П.Л. Математический анализ. Конспект лекций. Электронный ресурс. Режим доступа: <http://fn.bmstu.ru/educational-work-fs-12/lecture-notes-fs-12> (дата обращения 01.09.2020).

Теоретические вопросы (определение предела по Коши)²

1. (2 балла) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией) [5].
2. (2 балла) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией) [5].
3. (2 балла) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией) [5].
4. (2 балла) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией) [6].

Теоретические вопросы (формулировки теорем)

1. (1 балл) Сформулируйте теорему об ограниченности сходящейся числовой последовательности. [4]
2. (1 балл) Сформулируйте теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [7]
3. (1 балл) Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций. [7]
4. (1 балл) Сформулируйте теорему о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию. [7]
5. (1 балл) Сформулируйте теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций. [7]
6. (1 балл) Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [8]
7. (1 балл) Сформулируйте теорему о сумме бесконечно малых разных порядков. [8]

Задачи для подготовки

1. Вычислите предел:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 3x^2 - 4}. \quad 1.2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}. \quad 1.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2}).$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{x^2+1}). \quad 1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x \operatorname{tg} x} - 1}{2x^2 - 1}. \quad 1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\sqrt{4-x} - 2}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2}. \quad 1.8. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(\pi - x) \sin x}. \quad 1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{2x^3 - 1}. \quad 1.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{3x+2}.$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)^{1/\sin x^2}. \quad 1.12. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{tg} x^2}. \quad 1.13. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln x).$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\lg(10+x^4)}.$$

2. Для функций $f(x)$ и $g(x)$: а) покажите, что каждая из функций является бесконечно малой или бесконечно большой при заданном стремлении аргумента; б) для каждой функции запишите главную часть (эквивалентную ей функцию вида $C(x-x_0)^\alpha$ при $x \rightarrow x_0$ или Cx^α при $x \rightarrow \infty$), укажите их порядки малости (роста); в) сравните функции, если это возможно.

$$2.1. f(x) = x^7 \sin \frac{1}{x} + x \cos x, \quad g(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

$$2.2. f(x) = x \ln(1+x), \quad g(x) = e^{2x} - e^x, \quad x \rightarrow 0.$$

$$2.3. f(x) = 1 + \cos x, \quad g(x) = \frac{(x-\pi)^2}{x-3,14}, \quad x \rightarrow \pi.$$

²Приведены не все вопросы. Остальные имеют аналогичную формулировку.

3. Исследуйте на непрерывность заданную функцию. Укажите точки разрыва, их характер, постройте график функции в окрестностях точек разрыва.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & |x| < \pi; \\ e^{1/(x^2 - \pi^2)}, & |x| \geq \pi. \end{cases} \quad 3.2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x < 0; \\ \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\pi - x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Типовой вариант билета по теории

1. (1 балл) Сформулируйте определение сходящейся последовательности.
2. (2 балла) Сформулируйте определение по Коши $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, где $a \in \mathbb{R}$. Приведите соответствующий пример (с геометрической иллюстрацией).
3. (1 балл) Сформулируйте теорему о сумме конечного числа бесконечно малых функций.

min: 2 балла, max: 4 балла

Типовой вариант билета по задачам

1. (3 балла) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$.
2. (3 балла) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{1-x^2} - 1) \arccos x}{(2^x - 1) \operatorname{arctg} x}$.
3. (3 балла) Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \arcsin^2 x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.
4. (4 балла) Для функций $f(x) = e^x - 2^x$ и $g(x) = x \operatorname{tg} x$: а) покажите, что каждая из функций является бесконечно малой или бесконечно большой при $x \rightarrow 0$; б) для каждой функции запишите главную часть (эквивалентную ей функцию вида $C(x - x_0)^\alpha$ при $x \rightarrow x_0$ или Cx^α при $x \rightarrow \infty$), укажите их порядки малости (роста); в) сравните функции, если это возможно.
5. (3 балла) Исследуйте на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x < 0; \\ \frac{\sqrt{x}}{\ln(x+1/2)}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Укажите точки разрыва, их характер, постройте график функции в окрестностях точек разрыва.

min: 10 баллов, max: 16 баллов