

# ЛАиФНП, 2-й сем., ИУ-РЛ-ПС-РТ (2022–23)

## Домашнее задание „Линейная алгебра“

### Задача 1 (1 балл)

В линейном пространстве  $V_3$  свободных векторов выбран правый ортонормированный базис  $(i, j, k)$ . Этот базис поворачивается вокруг вектора  $e_1$  (это один из базисных векторов) на угол  $\varphi$  (в положительном направлении, если  $\varphi > 0$ , т.е. против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $e_1$ ). Затем полученный базис поворачивается вокруг вектора  $e_2$  (это один из базисных векторов нового базиса) на угол  $\psi$ . В результате получается новый базис  $(i', j', k')$ . Найти матрицу перехода из старого базиса в новый.

Вар.	$e_1$	$\varphi$	$e_2$	$\psi$
1	$i$	$45^\circ$	$k$	$135^\circ$
2	$j$	$135^\circ$	$i$	$30^\circ$
3	$i$	$30^\circ$	$j$	$135^\circ$
4	$j$	$150^\circ$	$i$	$60^\circ$
5	$i$	$60^\circ$	$j$	$150^\circ$
6	$j$	$-45^\circ$	$i$	$150^\circ$
7	$i$	$150^\circ$	$j$	$-45^\circ$
8	$i$	$-45^\circ$	$k$	$60^\circ$
9	$k$	$60^\circ$	$i$	$-45^\circ$
10	$j$	$60^\circ$	$k$	$150^\circ$
11	$k$	$150^\circ$	$j$	$60^\circ$

Вар.	$e_1$	$\varphi$	$e_2$	$\psi$
12	$i$	$30^\circ$	$j$	$45^\circ$
13	$j$	$30^\circ$	$k$	$45^\circ$
14	$k$	$30^\circ$	$i$	$45^\circ$
15	$i$	$45^\circ$	$j$	$60^\circ$
16	$i$	$-45^\circ$	$j$	$-60^\circ$
17	$k$	$-15^\circ$	$i$	$30^\circ$
18	$k$	$-45^\circ$	$i$	$75^\circ$
19	$j$	$30^\circ$	$k$	$150^\circ$
20	$i$	$120^\circ$	$k$	$150^\circ$
21	$i$	$-60^\circ$	$k$	$15^\circ$
22	$k$	$30^\circ$	$i$	$120^\circ$

Вар.	$e_1$	$\varphi$	$e_2$	$\psi$
23	$j$	$120^\circ$	$k$	$45^\circ$
24	$k$	$-135^\circ$	$j$	$60^\circ$
25	$j$	$60^\circ$	$i$	$150^\circ$
26	$i$	$135^\circ$	$k$	$240^\circ$
27	$j$	$30^\circ$	$k$	$-120^\circ$
28	$k$	$-135^\circ$	$j$	$30^\circ$
29	$i$	$60^\circ$	$j$	$-120^\circ$
30	$k$	$-150^\circ$	$i$	$45^\circ$
31	$j$	$120^\circ$	$k$	$-150^\circ$
32	$i$	$-45^\circ$	$j$	$-120^\circ$

### Задача 2 (1 балл)

Векторы  $p$  и  $q$  евклидова пространства  $E_4$  представлены своими координатами в базисе  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

- применяя процесс ортогонализации к базису  $\{a_i\}$ , построить ортонормированный базис  $\{b_j\}$ ;
- найти матрицу перехода  $T_{b_j \rightarrow a_i}$  из полученного ортонормированного базиса  $\{b_j\}$  в исходный базис  $\{a_i\}$ ;
- Найти координаты векторов  $p$  и  $q$  в ортонормированном базисе  $\{b_i\}$ ;
- вычислить скалярное произведение  $(p, q)$ ;
- вычислить угол между векторами  $p$  и  $q$ .

#### Вариант 1.

$$p = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

#### Вариант 2.

$$p = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2** (1 балл)

Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  евклидова пространства  $E_4$  представлены своими координатами в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису  $\{\mathbf{a}_i\}$ , построить ортонормированный базис  $\{\mathbf{b}_j\}$ ;

б) найти матрицу перехода  $T_{\mathbf{b}_j \rightarrow \mathbf{a}_i}$  из полученного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{b}_j\}$  в исходный базис  $\{\mathbf{a}_i\}$ ;

в) Найти координаты векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{b}_i\}$ ;

г) вычислить скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ;

д) вычислить угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

**Вариант 3.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 4.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 5.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -18 \\ -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 6.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 7.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 8.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 9.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2** (1 балл)

Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  евклидова пространства  $E_4$  представлены своими координатами в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису  $\{\mathbf{a}_i\}$ , построить ортонормированный базис  $\{\mathbf{b}_j\}$ ;

б) найти матрицу перехода  $T_{\mathbf{b}_j \rightarrow \mathbf{a}_i}$  из полученного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{b}_j\}$  в исходный базис  $\{\mathbf{a}_i\}$ ;

в) Найти координаты векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{b}_i\}$ ;

г) вычислить скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ;

д) вычислить угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

**Вариант 10.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 11.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 12.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 13.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 14.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 15.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 16.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2** (1 балл)

Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  евклидова пространства  $E_4$  представлены своими координатами в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису  $\{\mathbf{a}_i\}$ , построить ортонормированный базис  $\{\mathbf{b}_j\}$ ;

б) найти матрицу перехода  $T_{\mathbf{b}_j \rightarrow \mathbf{a}_i}$  из полученного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{b}_j\}$  в исходный базис  $\{\mathbf{a}_i\}$ ;

в) Найти координаты векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{b}_i\}$ ;

г) вычислить скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ;

д) вычислить угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

**Вариант 17.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 18.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 19.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 20.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 21.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 22.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 23.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Задача 2** (1 балл)

Векторы  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  евклидова пространства  $E_4$  представлены своими координатами в базисе  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ , векторы которого в свою очередь представлены своими координатами в некотором ортонормированном базисе.

а) применяя процесс ортогонализации к базису  $\{\mathbf{a}_i\}$ , построить ортонормированный базис  $\{\mathbf{b}_j\}$ ;

б) найти матрицу перехода  $T_{\mathbf{b}_j \rightarrow \mathbf{a}_i}$  из полученного ортонормированного базиса  $\{\mathbf{b}_j\}$  в исходный базис  $\{\mathbf{a}_i\}$ ;

в) Найти координаты векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  в ортонормированном базисе  $\{\mathbf{b}_i\}$ ;

г) вычислить скалярное произведение  $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ;

д) вычислить угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$ .

**Вариант 24.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 25.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 21 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 26.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 27.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 28.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 29.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Вариант 30.**

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Задача 3** (2 балла)

Уравнение кривой второго порядка на плоскости  $Oxy$  привести к каноническому виду, указав:

- а) преобразование перехода из заданной системы координат в каноническую (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);
- б) канонический вид уравнения кривой;
- в) каноническую систему координат и кривую на плоскости  $Oxy$ .

**Вариант 1.**  $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0.$

**Вариант 2.**  $8x^2 + 6xy - 5\sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y - 22 = 0.$

**Вариант 3.**  $4xy - 4x^2 - y^2 + 10\sqrt{5}x + 10\sqrt{5}y + 25 = 0.$

**Вариант 4.**  $4xy - 2x^2 - 5y^2 + 4\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y - 4 = 0.$

**Вариант 5.**  $7x^2 - y^2 + 6xy - 4\sqrt{10}x - 4\sqrt{10}y + 8 = 0.$

**Вариант 6.**  $2x^2 + 2y^2 - 4xy + 3\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y - 6 = 0.$

**Вариант 7.**  $6x^2 + 3y^2 - 4xy + 4\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y + 22 = 0.$

**Вариант 8.**  $x^2 - 7y^2 - 6xy - 6\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y + 42 = 0.$

**Вариант 9.**  $12xy - 9x^2 - 4y^2 + 14\sqrt{13}x - 18\sqrt{13}y - 65 = 0.$

**Вариант 10.**  $3x^2 + 6y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 36 = 0.$

**Вариант 11.**  $5x^2 - 3y^2 + 6xy + 8\sqrt{10}x + 80 = 0.$

**Вариант 12.**  $x^2 + y^2 - 2xy + 5\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 8 = 0.$

**Вариант 13.**  $7x^2 + 4y^2 + 4xy + 6\sqrt{5}x - 12\sqrt{5}y + 51 = 0.$

**Вариант 14.**  $3x^2 - 5y^2 + 6xy - 8\sqrt{10}y + 4 = 0.$

**Вариант 15.**  $24xy - 16x^2 - 9y^2 + 70x + 10y - 125 = 0.$

**Вариант 16.**  $8x^2 + 5y^2 - 4xy + 8\sqrt{5}x + 16\sqrt{5}y + 64 = 0.$

**Вариант 17.**  $13x^2 - 3y^2 + 12xy + 10\sqrt{10}x - 5 = 0.$

**Вариант 18.**  $16x^2 + y^2 + 8xy + 10\sqrt{17}x - 6\sqrt{17}y - 51 = 0.$

**Вариант 19.**  $5x^2 + 8y^2 - 4xy + 16\sqrt{5}x + 8\sqrt{5}y - 44 = 0.$

**Вариант 20.**  $3x^2 - 13y^2 + 12xy - 10\sqrt{10}y + 5 = 0.$

**Вариант 21.**  $4x^2 + y^2 + 4xy + 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y - 5 = 0.$

**Вариант 22.**  $10x^2 + 7y^2 - 4xy - 20\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 16 = 0.$

**Вариант 23.**  $3x^2 + 4xy - 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 9 = 0.$

**Вариант 24.**  $9x^2 + y^2 + 6xy + 20\sqrt{10}y - 50 = 0.$

**Вариант 25.**  $11x^2 + 3y^2 + 6xy - 2\sqrt{10}x + 6\sqrt{10}y - 22 = 0.$

**Вариант 26.**  $x^2 + 7y^2 - 8xy + 2\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y - 4 = 0.$

**Вариант 27.**  $6xy - 9x^2 - y^2 - 5\sqrt{10}x + 5\sqrt{10}y + 30 = 0.$

**Вариант 28.**  $13x^2 + 5y^2 + 6xy + 10\sqrt{10}x - 2\sqrt{10}y - 26 = 0.$

**Вариант 29.**  $6x^2 + 8xy - 4\sqrt{5}x - 8\sqrt{5}y - 26 = 0.$

**Вариант 30.**  $8xy - 16x^2 - y^2 + 6\sqrt{17}x - 10\sqrt{17}y + 51 = 0.$

**Задача 4** (2 балла)

Уравнение поверхности второго порядка в пространстве  $Oxyz$  привести к каноническому виду, указав:

а) преобразование перехода от заданной системы координат в каноническую (собственные числа ортогонального преобразования расположить в порядке возрастания);

б) канонический вид поверхности;

в) в канонической системе координат построить поверхность, используя метод сечений для исследования формы поверхности.

**Вариант 1.**  $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 4x + 4y - 14 = 0.$

**Вариант 2.**  $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy - 4yz + 8y + 8z - 8 = 0.$

**Вариант 3.**  $2x^2 + 10y^2 - 2z^2 + 12xy + 8yz + 12\sqrt{14}x - 4\sqrt{14}y - 8\sqrt{14}z - 56 = 0.$

**Вариант 4.**  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz + 24y - 6z - 7 = 0.$

**Вариант 5.**  $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz + 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}z + 12 = 0.$

**Вариант 6.**  $5x^2 + 6y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz - 20x - 20y - 10 = 0.$

**Вариант 7.**  $4x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y - 4z - 18 = 0.$

**Вариант 8.**  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 8xy + 8yz - 20x - 10y - 20z + 45 = 0.$

**Вариант 9.**  $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 4z - 2 = 0.$

**Вариант 10.**  $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 6\sqrt{6}x + 12\sqrt{6}y + 6\sqrt{6}z = 0.$

**Вариант 11.**  $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xz - 8\sqrt{2}x - 2y - 8\sqrt{2}z + 17 = 0.$

**Вариант 12.**  $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z - 72 = 0.$

**Вариант 13.**  $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 10z + 74 = 0.$

**Вариант 14.**  $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2\sqrt{14}x + 4\sqrt{14}y - 6\sqrt{14}z - 28 = 0.$

**Вариант 15.**  $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz - 20\sqrt{2}x + 20\sqrt{2}y + 40 = 0.$

**Вариант 16.**  $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 12x - 12y + 18 = 0.$

**Вариант 17.**  $4x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xz + 12\sqrt{2}x - 20y + 12\sqrt{2}z - 106 = 0.$

**Вариант 18.**  $y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}xz - 2\sqrt{6}x + 2y - 2\sqrt{3}z = 0.$

**Вариант 19.**  $5x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 4xy + 6x - 6y + 4z + 46 = 0.$

**Вариант 20.**  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz + 4x + 4\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}z - 6 = 0.$

**Вариант 21.**  $6x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y + 2z + 2 = 0.$

**Вариант 22.**  $2y^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 6\sqrt{3}x - 6\sqrt{3}z - 9 = 0.$

**Вариант 23.**  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 9\sqrt{2}x + 7\sqrt{2}y - 4z + 10 = 0.$

**Вариант 24.**  $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xz + \sqrt{2}x - 4y + \sqrt{2}z - 9 = 0.$

**Вариант 25.**  $6xy + 8xz + 40x + 50z + 10 = 0.$

**Вариант 26.**  $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 2\sqrt{3}xz + 2yz + 16x - 4 = 0.$

**Вариант 27.**  $10x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 6xz + 8yz + 60z = 0.$

**Вариант 28.**  $3y^2 - 4xy - 10xz + 4yz - \sqrt{6}x - 2\sqrt{6}y + \sqrt{6}z + 9 = 0.$

**Вариант 29.**  $4x^2 - y^2 - z^2 - 10xy - 10xz + 4\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}y + 4\sqrt{3}z + 48 = 0.$

**Вариант 30.**  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xz - 4x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z + 25 = 0.$